

MARIA DA CONCEIÇÃO MONTEIRO DA COSTA

MODELO DO PENSAMENTO VISUAL-ESPACIAL:
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO INÍCIO DA
ESCOLARIDADE

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de doutor em Ciências de Educação – Especialidade de Teoria Curricular e Ensino das Ciências pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

LISBOA

2005

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar e profundamente reconhecida aos meus orientadores Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva e Professor Doutor José Manuel Matos, pela sua orientação, apoio e encorajamento na execução deste estudo.

Agradeço o apoio da Professora Doutora Luísa Morgado, da Professora Doutora Teresa Mendes e do Mestre Secundino Correia em diferentes fases deste trabalho.

Agradeço à Escola Superior de Educação de Coimbra e ao PRODEP as suas contribuições nesta pesquisa.

Agradeço aos colegas da UIED/UNL que ao longo de vários seminários onde apresentei alguns resultados empíricos, os discutiram comigo ajudando ao seu aprofundamento.

Agradeço aos alunos, professores, colegas e todos aqueles que colaboraram nesta pesquisa.

Agradeço às instituições e pessoas que disponibilizaram meios para a realização da investigação.

Sumário

Este estudo pretende elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial e a partir dele compreender o seu desenvolvimento, identificando modos de pensamento visual-espacial e processos associados. Começou-se com a criação de um modelo teórico inicial e seguiu-se uma investigação empírica que focou dois ambientes de ensino para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial, no contexto da exploração e compreensão das isometrias. Os ambientes de ensino incidiam sobre o mesmo tópico, mas num deles as tarefas envolviam apenas actividades com material manipulável (não tecnológico). No outro ambiente eram atribuídas tarefas mistas que incluíam actividades com material manipulável (não tecnológico) e o computador, micromundo Tarta, especialmente concebido para o estudo. Este micromundo pretende estimular a exploração das ideias de translação, reflexão e rotação, através dos movimentos rígidos deslizar, virar e rodar.

A metodologia da investigação é de natureza qualitativa integrando a análise e a interpretação de transcrições de registos vídeo das respostas individuais de doze alunos a tarefas geométricas antes e depois do ambiente de ensino e das execuções de outras tarefas geométricas feitas em aula, por díades de alunos usando o micromundo. Pretendia-se assim validar não só o modelo teórico inicial para o pensamento visual-espacial, seguindo os critérios de Schoenfeld como detectar a influência da dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento visual-espacial, especificadamente as suas relações com as zonas de desenvolvimento proximal de Vygotsky de cada aluno. Os dados foram organizados em episódios e distribuídos por categorias. Estes episódios foram analisados e interpretados seguindo uma abordagem metodológica próxima da do método de comparação constante. Foram ainda determinados os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos alunos antes e depois da experimentação do ambiente de ensino e analisadas alterações nesses níveis.

As conclusões do estudo integram a construção dum modelo teórico para a compreensão do pensamento visual-espacial onde foram identificados quatro modos de pensamento: modo

resultante da percepção, modo resultante da manipulação mental de imagens, modo resultante da construção mental de relações entre imagens e modo resultante da exteriorização do pensamento (que inclui metáforas e gestos). Para cada modo de pensamento foram explicitados processos de pensamento específicos. Estabeleceu-se uma relação entre os níveis de Van Hiele manifestados pelos alunos e aqueles modos de pensamento visual-espacial.

Palavras chave: Educação em Geometria, Pensamento Visual-Espacial, Imagética, Capacidades Espaciais, Gestos, Dimensão Sócio-Cultural da Aprendizagem, Van Hiele, Vygotsky.

Abstract

The study intends to create, explore and refine a theoretical model for visual-spatial thinking and through it to understand the development thereof by the identification of the visual-spatial thinking modes and the thinking processes associated to them. We started with the creation of an initial theoretical model and proceeded with an empirical investigation which focused on two teaching environments for the development of visual-spatial thinking, in the context of the exploration and understanding of isometries. Both teaching environments dealt with the same topic, but in one of them the tasks only included activities using manipulative materials (non technological). In the other environment, on the other hand, mixed tasks were given which includes not only activities using manipulative materials (non technological) but also using a microworld Tarta, especially conceived for this study. We designed this computer environment to try to stimulate the exploration of ideas of translation, reflection and rotation, through the motions slide, flip and turn.

The methodology of this research is of a qualitative nature and integrates the analysis and interpretation of video registration transcriptions of: the individual answers by twelve students to geometric tasks, before and after the teaching environment; and of the performance of other geometric tasks done in the classroom by pairs of students using the microworld. We aim not only at validating the initial theoretical model for the visual-spatial thinking according to the Schoenfeld criteria but also at detecting the influence of socio-cultural dimension in the visual-spatial thinking modes specially the relationships with the zone of proximal development of Vygotsky for each student. The data were organized through episodes and distributed in categories. The episodes were analysed and interpreted according to a methodological approach close to the constant comparative method. The geometric development levels to elementary movements manifested by the students before and after the experimentation of the teaching environment were determined and the level alterations analysed.

The conclusions of the study integrate the theoretical model construction for the understanding of visual-spatial thinking, and the identification of four thinking modes: the

mode resultant from perception, the mode resultant from mental manipulation of images, the mode resultant from mental construction of relationships between images and the mode resultant from the exteriorization of the thinking (which includes metaphors and gestures). For each mode specific thinking processes were explicated. A relationship between the Van Hiele levels manifested by the students and the modes of the visual-spatial thinking was determined.

Key Words: Geometry Education, Visual-Spatial Thinking, Imagery, Spatial Abilities, Gestures, Socio-Cultural Dimension of Learning, Van Hiele, Vygotsky.

Índice de matérias

Agradecimentos	iii
Sumário.....	v
Abstract.....	vii
Índice de matérias	ix
Índice de figuras.....	xiii
Índice de quadros.....	xv
Capítulo I.....	1
Introdução	1
1.1. Precisão de terminologia	1
1.2. Pertinência do estudo.....	2
1.2.1. A relevância da geometria	3
1.2.2. Dificuldades no ensino da geometria	5
1.2.3. A visualização e a educação matemática.....	8
1.2.4. O computador e a educação matemática	12
1.3. Objectivos do estudo	14
1.4. Uma visão geral da dissertação	15
Capítulo II.....	17
Aprofundamento de tópicos fundamentais	17
2.1. A intuição	17
2.2. A abstracção	23
2.3. A actividade da mente	25
2.4. Imagética e capacidades espaciais.....	28
2.4.1. Imagética	28
2.4.2. Capacidades espaciais	37

2.5. Matemática corpórea e os mecanismos conceptuais metáforas e gestos	45
2.5.1. Metáforas	48
2.5.2. Gestos.....	55
2.6. Dimensão sócio-cultural da aprendizagem	62
2.6.1. Mediação.....	63
2.6.2. O pensamento e a linguagem	64
2.6.3. Interações e a aprendizagem	66
2.6.4. Apropriação.....	67
Capítulo III	69
Metodologia	69
3.1. Desenvolvimento do modelo teórico	70
3.2. Desenvolvimento dos ambientes de ensino	70
3.3. Desenvolvimento e administração de tarefas geométricas	71
3.3.1. Desenvolvimento de tarefas geométricas.....	71
3.3.2. Administração das tarefas geométricas.....	73
3.4. Implementação dos ambientes de ensino	74
3.5. Recolha e análise de dados.....	78
3.5.1. Recolha.....	79
3.5.2. Refinação e avaliação do modelo teórico	79
3.5.3. Níveis de desenvolvimento geométrico	81
3.5.4. A investigadora	84
3.6. Limitações do estudo	85
Capítulo IV	87
Modos de pensamento visual-espacial e processos mentais	87
4.1. Modelo teórico inicial	89
4.1.1. O pensamento visual-espacial resultante da percepção	90
4.1.2. O pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens	94
4.1.3. Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento.....	100
4.2. Sequências de modos de pensamento visual-espacial.....	102
4.3. Influências marcantes na construção do modelo teórico	106
4.4. Questões específicas sobre as quais avaliar o modelo	109
4.5. Limitações do modelo.....	110
Capítulo V.....	111
Análise do modelo teórico para o pensamento visual-espacial	111
5.1. Caracterização empírica dos modos de pensamento visual-espacial	112
5.1.1. Modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção	112
5.1.2. Modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens.....	124
5.1.3. Modo de pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens	132
5.1.4. Modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento.....	135
5.2. Dimensão sócio-cultural do pensamento visual-espacial.....	151
5.2.1. Interações entre os alunos das díades.....	152

5.2.2. A intervenção da investigadora	154
5.2.3. A função mediadora do micromundo Tarta.....	155
5.2.4. Interações sócio-culturais	158
Capítulo VI.....	165
O desenvolvimento dos ambientes de ensino.....	165
6.1. Escolha do domínio de trabalho	165
6.2. Desenvolvimento do micromundo Tarta	167
6.3. Desenvolvimento das sessões de ensino.....	170
6.4. Sensibilização das professoras aos ambientes de ensino.....	171
6.5. Análise dos níveis de desenvolvimento geométrico.....	175
6.5.1. Resultados da codificação das respostas de alunos das duas turmas.....	176
6.5.2. Níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos manifestados pelos alunos das duas turmas.....	180
Capítulo VII.....	183
Conclusões e recomendações	183
7.1. Resumo do estudo.....	183
7.2. Resposta a questões específicas do modelo.....	185
7.2.1. Divisão do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e da construção mental da relação entre imagens.....	185
7.2.2. A dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento visual-espacial	186
7.2.3. Modelo final para o pensamento visual-espacial.....	188
7.2.4. Critérios para avaliar o modelo de pensamento visual-espacial.....	192
7.3. O raciocínio geométrico dos alunos	195
7.4. Recomendações	197
7.3.1. Recomendações para o ensino.....	197
7.3.2. Recomendações para a investigação.....	198
Referências	201
Índice remissivo dos termos mais importantes	219
ANEXOS	221
ANEXO A.....	223
Tarefas Geométricas	223
I (A)	225
I (B)	225
II	226
III	227
IV (A)	228
IV (B).....	229
V	230
VI (A)	231
VI (B).....	232

VI (C)	233
VII (A).....	234
VII (B).....	235
VII (C).....	236
VII (D).....	237
VIII (A)	238
VIII (B)	239
VIII (B1)	240
VIII (B2)	241
VIII (B3)	242
VIII (C)	243
ANEXO B	245
Transcrições de partes das actividades do grupo 1 e do grupo 2 quando resolviam a tarefa <i>flor</i>.....	245
B.1. Transcrição de parte das actividades do grupo 1 (Abel e Delfim) quando na aula resolviam a tarefa <i>flor</i> , usando o micromundo Tarta	247
B.2. Transcrição de parte das actividades do grupo 2 (Edgar e Gil) quando na aula resolviam a tarefa <i>flor</i> , usando o micromundo Tarta	254
ANEXO C	259
Sessões do ambiente de ensino que dá ênfase aos movimentos, rodar, virar e deslizar (turma B).....	259
ANEXO D	311
CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta	311
D.1. Sessões do ambiente de ensino que dão ênfase aos movimentos, rodar, virar e deslizar (turma A).....	312
D.2. Instruções para instalação do CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta	312
D.3. O CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta.....	313

Índice de figuras

Fig. 2.1. Portador de esquema imagético operativo para a rotação (adaptado de Dörfler, 1991, p. 26).....	34
Fig. 2.2. Portador de esquemas imagético operativo para a reflexão (adaptado de Dörfler, 1991, p. 26).....	34
Fig. 4.1. Composição do triângulo médio do tangram.	95
Fig. 4.2. Modos do pensamento visual-espacial e suas ligações.	103
Fig. 4.3. Diagramas apresentados às crianças.	104
Fig. 5.1. Resposta da Carlota.....	113
Fig. 5.2. Flor.	114
Fig. 5.3. Espinha.	116
Fig. 5.4. Metade da espinha construída pelo Edgar e o Gil.	117
Fig. 5.5. Resposta do Gil à tarefa VI (B).	118
Fig. 5.6. Construção inicial da Felisberta na tarefa I (B).	119
Fig. 5.7. Nova construção da Felisberta para a tarefa I (B).	119
Fig. 5.8. Resposta do Carolino à tarefa IV(B).	131
Fig. 5.9. Metade da espinha construída pelo Edgar e pelo Gil.	137
Fig. 5.10. Construção do Edgar.	138
Fig. 5.11. Espinha.	143
Fig. 5.12. Construção do Edgar e do Gil para a tarefa <i>flor</i>	144
Fig. 5.13. Parte da flor construída por Abel e Delfim.	145
Fig. 5.14. Figura construída pela investigadora.	155
Fig. 6.1. Imagem que mostra o ecrã do TARTA para o professor com dois objectos, a janela dos comandos, e a janela das opções.	168
Fig. 6.2. Imagem do ecrã do TARTA para o aluno e da janela das suas opções.	169
Fig. 7.1. Modos de pensamento visual-espacial	189

Índice de quadros

Quadro 3. 1. Objectivos das tarefas geométricas.....	71
Quadro 3.2. Fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele.....	76
Quadro 3.3. Fases de aprendizagem de Van Hiele e as sessões de ensino.....	77
Quadro 4.1. Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições.	90
Quadro 4.2. Processos mentais do modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção.	92
Quadro 4.3. Processos mentais do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens.....	98
Quadro 4.4. Processos mentais do modo de pensamento visual espacial resultante da exteriorização do pensamento	101
Quadro 4.5. Modos do pensamento visual-espacial e as três classificações de imagética.	108
Quadro 5.1. Interacções entre um par de alunos do grupo 1.	160
Quadro 5.2. Interacções entre alunos do grupo 2 e a investigadora.	163
Quadro 6.1. Lista das sessões dos dois ambientes de ensino.	171
Quadro 6.2. Fases do programa de sensibilização das professoras participantes aos ambientes de ensino.....	173
Quadro 6.3. Codificação para movimentos em tarefas realizadas por alunos da turma A.....	177
Quadro 6.4. Codificação para movimentos em tarefas de alunos da turma B.....	179
Quadro 6.5. Níveis para movimentos atingidos pelos alunos da turma A.	181
Quadro 6.6. Níveis para movimentos atingidos pelos alunos da turma B.....	182
Quadro 7.1. Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições, contemplados no modelo final de pensamento visual-espacial.	188
Quadro 7.2. Níveis de Van Hiele e modos de pensamento visual-espacial.....	196

Capítulo I

Introdução

O capítulo que introduz este estudo tem o propósito de contextualizar a investigação que foi realizada, descrevendo de modo sucinto a sua pertinência e os objectivos que presidiram à sua elaboração. Assim procede-se a uma breve apresentação do estudo apontando as suas principais influências e motivações. São ainda examinadas algumas questões relacionadas com a relevância e actualidade da geometria, com as dificuldades no seu ensino, com a importância da visualização na educação matemática e com o papel do computador na educação matemática. Por fim, enumeram-se os objectivos deste estudo e é apresentada uma visão geral da sua estrutura.

1.1. Precisão de terminologia

Na literatura encontramos termos como *visualização*, *pensamento visual*, *raciocínio visual*, *raciocínio espacial*, *pensamento espacial* para nomear actos mentais que têm a ver com o pensamento que combina o visual com o espacial – pensamento visual-espacial que é importante precisar.

Dentro do trabalho já desenvolvido por vários autores no campo da visualização e do pensamento visual, encontra-se uma grande gama de definições destes termos que parecem particularmente escorregadios (Bishop, 1989). O termo visualização tem diferentes conotações, e umas vezes está restrito ao que se passa na mente do aluno, outras está restrito a algum meio de representação externa (por exemplo o ecrã do computador) e ainda outras a visualização é definida por um processo para viajar entre estes dois domínios. As definições seguintes de visualização evidenciam diferentes significados conforme se trata da matemática, da investigação científica, da educação matemática ou da psicologia: “visualização em

matemática constitui um aspecto importante da actividade matemática onde se actua sobre representações concretas enquanto se descobrem as relações abstractas que interessam ao matemático” (Guzmán, 1996, p. 16); “o termo visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador” (Cunningham, 1991, p. 67); “visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direcções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica” (Dreyfus, 1990, p. 119); “visualização é a relação entre imagens” (Solano e Presmeg, 1995, p. 67). Estas definições porém concordam em que a visualização se foca na percepção e manipulação de imagens visuais.

Antes de precisar o que estes termos significam neste trabalho, servir-nos-emos deles de acordo com o uso feito pelos diversos autores que citarmos.

1.2. Pertinência do estudo

Este estudo debruça-se sobre o “pensamento visual-espacial” e examina-o em pormenor. Elabora-se para isso um modelo teórico inicial para o compreender, que é refinado e avaliado através duma investigação empírica com alunos do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico, no contexto da exploração e compreensão das transformações geométricas (as isometrias translação, rotação e reflexão). O modelo teórico proposto entronca em estudos anteriores de diferentes autores, tendo sido influenciado sobretudo pelos trabalhos de Presmeg, Fischbein, Piaget, Dubinsky, Vygotsky, McNeill, Lakoff e Damásio.

A motivação para a necessidade de compreender o pensamento visual-espacial surgiu-me ao reflectir sobre as dificuldades encontradas nos meus alunos (professores e futuros professores do 1º ciclo de Ensino Básico) fundamentalmente nas suas aulas de geometria, por exemplo quando eles usavam a linguagem de programação Logo. Pareceu-me então urgente aprofundar primeiro o pensamento visual-espacial dos alunos deles para depois se tentarem colmatar as dificuldades dos professores, melhorando a respectiva formação na direcção adequada.

A tendência para se não aumentar o número de aulas de Matemática, a ênfase nas manipulações simbólicas como principal pré-requisito para matemáticas mais avançadas, a consequente redução da quantidade e da importância da geometria no currículo parecem indicar que as perspectivas de melhoria do ensino da geometria serão fracas, o que em particular não nos ajudará a evitar um desenvolvimento tardio, nos alunos de todos os níveis, de processos de visualização. É que, como bem chama a atenção Duval (1998, p. 38), a geometria é o campo próprio para o “raciocínio visual”, “a geometria envolve três tipos de

processos cognitivos que satisfazem funções epistemológicas específicas”. Um deles é “o dos processos de visualização no que respeita à representação espacial para ilustração de uma afirmação, ou para a exploração heurística de uma situação complexa, para um olhar sintético sobre ela ou para uma sua verificação subjectiva”. Duval aponta ainda que o “raciocínio visual” pode funcionar por si de forma a completar um argumento matemático ou ser misturado com outros tipos de raciocínio, não sendo necessariamente um estágio preliminar global, de apoio e intuitivo, dos processos de raciocínio em geral, como muitas vezes é considerado.

A minha preocupação com a geometria fez-me examinar algumas questões, que em parte procurarei relatar aqui, ligadas com a relevância da geometria, com as dificuldades no ensino da geometria, com a importância da visualização em educação matemática especificadamente na educação em geometria e finalmente com a influência do computador na educação matemática. As considerações sucintas apresentadas a seguir pretendem ser também uma justificação para a pertinência da presente investigação.

1.2.1. A relevância da geometria

Examinando a evolução histórica da geometria escrita por Mammana e Villani (1998) notamos flutuações na atenção dedicada na investigação e nas aplicações da geometria, aos seus diversos aspectos: visuais, computacionais, conceptuais, algébricos, utilitários e aplicativos. Os povos desde a pré-história têm tendência para reproduzir a realidade usando desenhos estilizados, para decorar os seus objectos usando motivos construídos a partir de formas geométricas dotadas de simetrias, e para dar formas geométricas simples às suas primeiras construções. Nesta primeira fase predomina o aspecto visual. Numa fase seguinte a geometria vai ao encontro de necessidades utilitárias para medir comprimentos, áreas ou volumes ou para traçar delimitações de terrenos. A geometria joga um papel instrumental relevante por exemplo, na arquitectura, na geografia e na astronomia. Nesta fase misturam-se os aspectos visuais e os aspectos computacionais e pode-se perceber uma primeira tentativa de racionalizar o conhecimento geométrico adquirido. Por volta de 300 anos antes de Cristo com os *Elementos* de Euclides os interesses da geometria concentram-se principalmente no aspecto conceptual da geometria, mudando o interesse em responder a necessidades práticas para a atenção ao processo de racionalização mais global e abstracto do conhecimento geométrico adquirido.

O tratado de Euclides tornou-se um modelo e um protótipo para uma sistematização racional de todos os campos de conhecimento. Durante muitos séculos a geometria foi

exaltada como uma das disciplinas mais relevantes para a formação geral. Contudo, durante cerca de 2000 anos, o conhecimento geométrico ficou cristalizado no esquema de Euclides. Ideias originais na investigação geométrica surgiram de desenvolvimentos paralelos (geometria projectiva, geometria analítica, geometria descritiva) mas não interferiram com a autoridade inquestionável do tratado de Euclides. Só no século XIX é que a geometria Euclidiana num certo sentido perdeu o seu papel central dentro da matemática e do conhecimento científico em geral graças à invenção de geometrias não-Euclidianas (Gauss, Bolyai, Lobachevsky). Estas geometrias contribuíram também para estimular uma nova era de investigação nos fundamentos da geometria (Riemann, Pasch, Peano, Veronese, Klein, Hilbert).

Nos anos seguintes a investigação sobre os aspectos algébricos da geometria teve um papel muito importante graças também ao facto de Dedekind, Cantor e Weierstrass fornecerem uma fundamentação rigorosa, decalcada da geometria, para a teoria dos números reais. No princípio do século XX foram criadas ferramentas algébricas novas para um estudo geral de objectos geométricos, emergindo disso a teoria dos espaços vectoriais. A geometria foi assim ganhando em generalidade mas isso provocou um maior distanciamento da intuição geométrica. Parece que agora está a voltar a surgir interesse pelos aspectos visuais da geometria, fora da comunidade matemática (informática, engenharia, química e medicina), ligados às aplicações da geometria em computação gráfica, manipulação e processamento de imagens, reconhecimento de padrões e robótica.

A geometria actual inclui não só os aspectos oriundos de outras eras e de diferentes ambientes culturais, acima evidenciados, que ainda hoje mantêm a sua importância, mas também muitos outros aspectos. Vou listar os aspectos identificados no documento para discussão sobre as perspectivas sobre o ensino da geometria para o século XXI (ICMI, 1998, p. 338) e considerados particularmente relevantes pelas suas implicações didácticas:

- Geometria como *a ciência do espaço*. A partir das suas raízes como uma ferramenta para descrever e medir figuras, a geometria tem-se tornado numa teoria de ideias e métodos pela qual podemos construir e estudar modelos idealizados do mundo físico bem como outros fenómenos do mundo real. Conforme os diferentes pontos de vista, nós obtemos a geometria euclidiana, afim, descritiva, projectiva e também a topologia ou as geometrias não-euclidianas e a combinatória.
- Geometria como um *método para representações visuais de conceitos e de processos* de outras áreas de matemática e de outras ciências; por exemplo, gráficos e teoria de grafos, diagramas de várias espécies, histogramas.

- Geometria como um *ponto de encontro* entre a matemática como uma teoria e a matemática como uma fonte de modelos.
- Geometria como uma *maneira de pensar e compreender* e a nível mais elevado como uma *teoria formal*.
- Geometria como um *exemplo paradigmático para ensinar raciocínio dedutivo*.
- Geometria como uma *ferramenta aplicada* tanto tradicionalmente como de uma maneira inovadora. A última inclui por exemplo gráficos de computador, processamento de imagem e manipulação de imagem, reconhecimento de padrões, robótica, pesquisa operacional.

1.2.2. Dificuldades no ensino da geometria

A longa história da geometria influenciou obviamente o seu ensino, embora só no século XX se tenham observado alterações radicais. Por exemplo, seria imprevisível há 50 anos que a régua e o compasso seriam postos fora de todos os locais de trabalho de engenheiros e técnicos pelas ferramentas do CAD. A variedade dos diferentes aspectos próprios da geometria, bem como a variedade das possíveis maneiras de os ensinar, dependem dos objectivos que queremos atingir e do tipo de alunos a quem nos dirigimos. Contudo para todo o nível educacional, desde o pré-escolar existem de facto partes da geometria que podem (e devem) ser ensinadas e aprendidas com sucesso.

Tal como enfatiza o documento de discussão do ICMI (1998), durante a segunda metade do século XX, a geometria parece ter progressivamente perdido a sua posição central no ensino da matemática em todos os países. Muitas vezes é totalmente ignorada ou só alguns dos seus itens são incluídos e estes são confinados a alguns “factos” elementares sobre figuras simples e suas propriedades.

As causas desta situação são várias, desde a introdução de novos tópicos nos currículos da matemática (por exemplo: probabilidade, estatística, ciência de computação, matemática discreta) até à diminuição do número de horas lectivas dedicadas à matemática, ou ao declínio do papel da geometria euclidiana em favor de outros aspectos da matemática e outros pontos de vista para o seu ensino (por exemplo, teoria de conjuntos, lógica e estruturas abstractas). Com este declínio também sofreram os aspectos visuais da geometria tanto a duas como a três dimensões e o estudo das secções cónicas e de outras curvas notáveis.

Ultimamente tem-se regressado a conteúdos mais tradicionais da matemática, com ênfase em actividades de colocar e resolver problemas e tem-se tentado, sem grande sucesso, renovar a geometria euclidiana clássica. Uma das razões para tal está nos cursos tradicionais sobre

geometria euclidiana onde os materiais são geralmente apresentados aos alunos como produtos finais acabados de actividade matemática e, nesta forma, não se enquadram nos currículos onde se espera que os alunos tomem parte activa no desenvolvimento dos seus conhecimentos matemáticos. Também, a percentagem de alunos do ensino secundário aumentou muito nas últimas décadas. Assim, a forma tradicional de ensinar geometria abstracta a uma minoria seleccionada tornou-se difícil e inapropriada às expectativas da maioria dos estudantes da nova geração. A necessidade de mais professores também provocou em média um declínio na sua preparação universitária, em particular no que respeita à geometria. Ainda por cima os jovens professores aprenderam matemática de currículos que descuidaram a geometria, pelo que lhes faltam bases neste campo, o que faz com que tenham tendência a descuidar o ensino da geometria aos seus alunos. Também a distância entre a concepção de geometria como área de investigação e o assunto a ser ensinado nas escolas parece estar a aumentar; até agora nenhum consenso foi encontrado em como construir uma ponte sobre esta brecha, nem mesmo se podia (ou deveria) ser construída uma ponte através da introdução de tópicos mais avançados nos currículos escolares de graus mais baixos (ICMI, 1998).

Em todos os países encontramos problemas no ensino da geometria, embora a evolução do ensino possa ter sido bastante diferente. Vamos descrever brevemente a situação em dois países (Egipto e Alemanha), casos muito diferentes, e terminar com uma referência à situação portuguesa.

O sistema educativo no Egipto é em larga medida centralizado. A geometria ocupa uma parte essencial do currículo em todos os níveis. A nível elementar (graus 1-5), a geometria é ensinada juntamente com a aritmética, mas é-lhe dado um lugar separado no currículo da matemática nos níveis preparatório (graus 6-9) e secundário (graus 10-11). O currículo de geometria no Egipto é fundamentalmente a geometria euclidiana clássica. As dificuldades em geometria encontram-se mais no seu ensino do que no assunto propriamente dito, segundo alguns supervisores do Ministério da Educação. O problema principal no ensino da geometria é que não é dada uma oportunidade suficiente, aos alunos, de compreender os conceitos a nível elementar. Deixam-lhes lacunas que eles carregam para o ciclo preparatório. Isto é ainda agravado no ciclo preparatório pela preocupação do professor em se focar completamente na taxa de sucesso no exame nacional. Como consequência, os teoremas são muitas vezes ensinados como factos e apresentados de uma forma elementar sem testar a sua compreensão e aplicações (Gholam, 1998).

Descrever a evolução e o estado dos currículos da geometria na Alemanha é complicado porque a respectiva política educacional depende de regiões as quais são administradas

separadamente. Contudo, há algumas características comuns que podem fornecer uma visão geral do ensino da geometria. Este tinha tradicionalmente na Alemanha um nível consideravelmente alto, pelo menos do ponto de vista do conteúdo. No período da Matemática Moderna, onde prevaleceu a tendência para a algebrização da matemática, houve um declínio do ensino da geometria nas escolas uma vez que a base lógica da geometria era muito complicada. A partir dos anos oitenta a geometria mudou e a tendência geral para o ensino da geometria caracteriza-se hoje pela abordagem de múltiplas perspectivas, o que significa que encontramos uma consciência crescente das várias influências sobre o ensino da geometria – fundamentalmente um reconhecimento do facto que não basta confiar numa visão única, seja do ponto de vista da matemática, seja do ponto de vista das teorias de aprendizagem. Assim, hoje, o ensino da geometria mostra um quadro complexo que inclui espaço para experiências matemáticas genuínas, para aplicações, para uma visão mais clássica da geometria e para uma visão tanto científica como estética da geometria. Mas a ênfase é sempre na relação mútua destes aspectos, não numa decisão por um ou por outro aspecto (Neubrand, 1998).

A reforma da Matemática Moderna só teve impacto em Portugal nos anos 70 pelo que o percurso relativo ao ensino da geometria foi semelhante ao de muitos outros países – tentativa de algebrização da geometria e consequentemente o desaparecimento da componente geométrica do currículo da matemática (Veloso e Ponte, 1999). Nos anos 60, José Sebastião e Silva responsável pela “modernização” do ensino da matemática em Portugal, encarava a matemática moderna de forma crítica, revelando uma posição equilibrada no que respeita aos conteúdos, proporcionando o tratamento de novos temas sem derrapar para os extremismos formalistas a que se assistia nos outros países e sem deixar cair o essencial dos temas habitualmente tratados neste nível (Ponte, 2003). Apesar disso, assistiu-se à degradação do ensino da geometria ao longo dos anos 70 e 80, agravada pela saída de cena de Sebastião e Silva, o que foi devido a uma conjugação de factores, por exemplo, da geometria ser considerada um subproduto da álgebra linear, de ser dado um estatuto menor à visualização na actividade matemática dos alunos e do eixo central da aprendizagem matemática ser constituído por aritmética → álgebra → análise (Veloso, 1998).

A partir dos anos oitenta começou a organizar-se um movimento de renovação da matemática, mas os seus esforços orientaram-se para questões educativas transversais ao currículo: a resolução de problemas, a utilização de tecnologias, o trabalho cooperativo na sala de aula, o trabalho de projecto e o desenvolvimento profissional dos professores, não tendo sido abordadas directamente questões como por exemplo, o desenvolvimento curricular em geometria (Veloso e Ponte, 1999). O aparecimento da linguagem Logo de Seymour Papert desencadeou um movimento crescente de interesse pelas questões e problemas de

geometria plana e este interesse ampliou-se com o aparecimento do Projecto Minerva e a realização das semanas de Logo. Nos fins dos anos oitenta foi lançado o processo de reforma dos programas de Matemática e segundo Veloso (1998) existiam algumas condições favoráveis para que a geometria recuperasse o lugar que lhe competia no currículo. Um momento significativo de reflexão em matéria curricular foi o Seminário de Vila Nova de Milfontes em 1988, organizado pela APM. O seu produto foi um documento de trabalho intitulado *Renovação do Currículo da Matemática*. Neste seminário destaca-se a influência das novas correntes sobre o currículo e o ensino que se tinham vindo a desenvolver internacionalmente. Um novo movimento de renovação curricular foi iniciado no Ensino Básico em 1996, com a “reflexão participada sobre os currículos” continuado pelo “projecto de gestão flexível” e culminado com a publicação denominada *Matemática na Educação Básica*”(Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) onde se procurou sistematizar as competências matemáticas que as crianças jovens devem desenvolver ao longo dos três ciclos do Ensino Básico. Relativamente à geometria lê-se:

“É essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação. De acordo com esta perspectiva, destacam-se como aspectos a desenvolver, as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destes na resolução de problemas”(p. 67).

As preocupações futuras sobre o ensino da geometria e a respectiva formação de professores no contexto português não estão muito afastadas das dos outros países. Sente-se nos trabalhos ligados com estas problemáticas influências fortes por exemplo do relatório Cockcroft (Inglaterra), das Normas de NCTM (Estados Unidos), da Matemática Realista (Holanda).

1.2.3. A visualização e a educação matemática

Muitos investigadores ligados à educação matemática têm dado ênfase à importância da visualização e do raciocínio visual na aprendizagem da matemática (Bishop, 1989; Dörfler, 1991; Presmeg, 1989, Zimmerman and Cunningham, 1991) e alguns sugerem que o pensamento visual pode ser uma alternativa e uma fonte poderosa para os estudantes fazerem matemática (Goldenberg, 1991; Tallb, 1991). A importância da imagética mental na construção de significado matemático é também realçada (Wheatley e Brown, 1994).

Cunningham descreve os benefícios da visualização como incluindo:

“a capacidade de se focar em capacidades específicas e em pormenores de problemas muito complexos para mostrar a dinâmica de sistemas e processos, e para aumentar a intuição e a compreensão de problemas e processos matemáticos” (1991, p. 70).

Ele defende ainda que a inclusão da visualização na educação matemática permite uma cobertura mais ampla de tópicos matemáticos e permite principalmente que os estudantes tenham acesso a novas maneiras de abordar a sua própria matemática. Em particular, pode provar-se que os argumentos visuais podem ser extremamente úteis para ajudar os estudantes a conceptualizarem ideias matemáticas particulares.

Barwise e Etchemendy (1991, p. 16) esboçam três modos em que o raciocínio visual pode ser considerado como raciocínio válido: “i) a informação visual é parte de uma dada informação da qual raciocinamos; ii) a informação visual pode ser parte do próprio raciocínio; iii) representações visuais podem desempenhar um papel na conclusão de uma peça de raciocínio. A componente visual do raciocínio matemático necessita de ser apresentado ao lado do simbólico para capacitar os estudantes a desenvolverem mais do que uma mera compreensão mecânica de conceitos, ideias e processos matemáticos. Analogamente Zimmerman e Cunningham (1991) dão ênfase à necessidade de uma abordagem multifacetada das ideias matemáticas. Eles defendem que a visualização matemática não é só uma apreciação matemática através de figuras, um substituto superficial da compreensão. Em vez disso sustentam que a visualização dá profundidade e significado à compreensão servindo de guia para a resolução de problemas e inspirando descobertas criativas. Para se atingir aquele nível de compreensão, eles propõem, como Tall (1991b), que a visualização não está isolada do resto da matemática, implicando que as representações visuais, numéricas e simbólicas de ideias devem ser explicitadas e ligadas.

Apesar de alguns estudos apontarem o potencial de abordagens visuais para a aprendizagem matemática e para a resolução de problemas, os estudantes mostram frequentemente relutância em usar a visualização para processar informação matemática (Eisenberg e Dreyfus, 1991) e, sempre que possível, usam uma estrutura simbólica para processar a informação e abordar os problemas. Noss, Healy e Hoyles (1997) dizem que, mesmo que essa relutância possa ser ultrapassada, a incorporação de visualizações na actividade matemática acarreta um conjunto de exigências cognitivas. Eles referem que muitos estudantes têm dificuldades em “ler” diagramas e reconhecer as transformações implicadas nelas; que quando imagens visuais poderosas estão presentes, os estudantes preferem resolver problemas por percepção em vez de mobilizarem o conhecimento matemático; e que os estudantes fogem a construir ligações entre as suas visualizações e o pensamento analítico.

Os educadores matemáticos reconhecem o poder potencial do raciocínio visual; contudo a sua implementação na aula está a faltar, quer porque os matemáticos ou quem desenvolve o currículo ou os professores não lhe estão a atribuir o seu completo valor ou estatuto, quer porque o raciocínio visual é difícil, necessitando de ser adquirido através de um trabalho reflectido e árduo (Dreyfus, 1991). Senechal (1991) suspeita que o pensamento visual não é rigoroso. Hershkowitz (1998) diz que pode ser que a comunidade esteja a construir a hipótese ingénua que os seres humanos nascem com capacidades de pensamento visual que são aplicadas sempre que necessárias e portanto nada precisa de ser feito para as educar ou desenvolver.

Vejam agora qual o papel da visualização na geometria e no seu ensino e em particular como a visualização se manifesta no estudo das transformações geométricas a nível elementar. Em geometria, a visualização tem três funções, cobre conjuntamente a apreensão operativa, discursiva e perceptiva de uma figura como uma representação do espaço. Porque não requer conhecimento matemático, a visualização desempenha um papel heurístico básico e por intermédio da apreensão operativa (mudança figural) pode dar algo como prova convincente. A mudança figural é uma acção que transforma a organização visual de uma configuração. A visualização pode estar embebida num processo discursivo natural que é uma espécie de descrição espontânea de um processo puramente configural e que está ancorado em hipóteses, conhecimentos de definições e teoremas. Uma configuração não pode estar embebido num discurso teórico mesmo que muitas vezes dê ideias-chaves para uma prova. Um dos principais problemas do ensino da geometria é a incapacidade de fazer com que a maior parte dos alunos ultrapassem a distância entre o processo discursivo natural e o processo discursivo teórico que é executado através da dedução (Duval, 1998).

Schell (1998) aponta que a visualização espacial é um dos muitos fios (o raciocínio dedutivo e a medição são por exemplo outros) que constituem o currículo designado por geometria. Esses tais fios não estão separados, mas entrelaçam-se. Quando todos aqueles fios estão desenvolvidos, os estudantes têm um esquema denominado “geometria” fortemente tecido e os diferentes elementos podem informar-se entre si; quando qualquer dos fios falta, a estrutura não é tão estável.

Para Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) a visualização e o pensamento visual estão no âmago do que faz da geometria um caso especial dentro da matemática. A geometria é um território intelectual ideal dentro do qual se podem executar experiências, desenvolver estilos de raciocínio baseados no visual, aprender a procurar invariantes e a usar estes e outros estilos de raciocínio para gerar argumentos construtivos. A geometria segundo Goldenberg, Cuoco e Mark é um veículo para construir hábitos do pensamento e propõem olhar o conteúdo

tradicional da geometria e a sua pedagogia de novas maneiras, baseadas no poder de ferramentas dinâmicas. O ponto de vista “hábitos de pensar” descreve o poder matemático e atira a tecnologia para um novo papel. Pessoas com poder matemático executam experiências de pensamento; mexem com máquinas reais e imaginadas; inventam coisas; procuram invariantes (padrões); fazem conjecturas razoáveis; descrevem coisas tanto em linguagem não cuidada como em linguagem formal; pensam sobre métodos, estratégias, algoritmos e processos; visualizam coisas (mesmo quando elas não são inerentemente visuais); procuram explicar *porque* as coisas são como eles as vêem; e discutem apaixonadamente sobre fenómenos intelectuais. As actividades que encorporam os tais “hábitos de pensar”, exigem aos estudantes que desenvolvam um sentido para as propriedades do espaço e da medida, encorajam o desenvolvimento de muitos temas clássicos da geometria Euclidiana e estimulam também os estudantes a visualizar coisas de mais que uma maneira, a empregar ferramentas oriundas de todo o espectro da matemática e irem para além da descoberta implicada pelos dados à procura de uma maneira de explicar o que vêem e isto de um modo que faz uso essencial da sua experiência (Goldenberg, Cuoco e Mark, 1998).

As *Normas* de NCTM (1991, 2000) é um documento importante quer como referência, quer como elemento crítico na apreciação de propostas curriculares e teve grande influência, tanto nos Estados Unidos, como no Canadá e em outros países. As Normas dão também ênfase ao pensamento visual e identificam como ideia importante para a matemática escolar “a geometria e o sentido espacial” dando relevo aos seguintes pontos: análise das características e propriedades dos objectos geométricos a duas e três dimensões; selecção e uso de diferentes sistemas de representações, incluindo geometrias das coordenadas e teoria de gráficos; reconhecimento da utilidade das transformações e simetrias para analisar situações matemáticas; uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas.

As transformações geométricas desempenham um papel essencial na Geometria. Segundo Howard Eves (1995, p. 99) “um dos métodos mais úteis explorados pelos géometras é o de transformar uma figura noutra que seja mais adequada a uma investigação geométrica”. O principal valor da geometria da transformação está em atingir o objectivo de uma apreciação informal e intuitiva da geometria (Pearman, 1990). A aprendizagem da geometria das transformações está ligada à presença do raciocínio visual dinâmico onde os alunos aprendem a identificar e a ilustrar movimentos de formas a duas e a três dimensões. A abordagem da geometria pelas transformações torna a geometria mais atraente a alunos da escola elementar, bem como pode ajudar a desenvolver as suas capacidades de visualização espacial (Clements e Battista, 1992; Jonhson-Gentile, 1990). Translações, rotações, reflexões

e composições dessas transformações podem ser ilustradas dinamicamente usando procedimentos em Logo apresentados pelo professor. Estas experiências visuais podem ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade de manipular imagens mentalmente – essência da visualização espacial (Johson-Gentile, 1990).

1.2.4. O computador e a educação matemática

Os computadores colocam à nossa disposição ferramentas poderosíssimas com que nem sequer sonharíamos há trinta anos atrás. As possibilidades de simulação com modelos de objectos reais ou de ideias abstractas, juntamente com explorações de variantes mais ou menos imaginativas, são realidades que o ensino da matemática em geral e o ensino da geometria em particular não podem ignorar. Concepções abstractas e formais estão cada vez mais acessíveis quando exploradas num computador que dá uma impressão de realidade muito viva a objectos matemáticos e relações (Mariotti, 2002).

Há unanimidade entre educadores e professores sobre o valor do computador para visualizar situações geométricas. Softwares de vários tipos usam técnicas de animação para fornecer meios de construir e mover configurações, para as observar sob vários ângulos e para modificar algumas das suas características. Estas funções demonstrativas põem em evidência um papel mais funcional do computador, como uma ferramenta para exploração, dando mais relevância à intuição, à construção e ao sentido espacial mas também fornecendo meios de os ligar aos aspectos teóricos (Osta, 1998). O trabalho de geometria usando o computador tem ainda uma outra consequência notável, que é o de dar lugar a experiências com o software estimulando o aparecimento de novas questões, o que mostra que a demonstração visual é interpretada em termos geométricos gerando outras questões que são resolvidas por meio da geometria (Laborde, 1998).

Ambientes de aprendizagem com computador como, por exemplo, os fornecidos pela linguagem de programação Logo ou pelos software de Geometria Dinâmica (por exemplo: Cabri-Geometry, The Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor) são particularmente adequados para o trabalho em Geometria a diferentes níveis de educação (Olive, 2002; Papert, 1980). A linguagem de programação Logo, criada por Papert, promove a aprendizagem através de interações envolvidas na programação do computador, onde as crianças “aprendem a transferir hábitos de exploração das suas vidas pessoais para um domínio formal da construção científica” (Papert, 1980, p.117). O software de Geometria Dinâmica permite às crianças ver a conceptualização em geometria como o estudo de propriedades invariantes de “desenhos” enquanto arrastam as suas componentes pelo ecrã. Aqueles dois tipos de

ambientes de aprendizagem são de complexidade diferente pelo que a aprendizagem resultante da interacção com esses ambientes é provável que conduza à construção de significados muito variados.

Programas de computador muito poderosos e abertos permitem simulações e explorações muito ricas, mas também trazem dificuldades várias aos trabalhos de alunos e professores, sobretudo na escola elementar. Por exemplo, enquanto as crianças podem executar por si os comandos do Logo para seguir ao longo dos caminhos que eles quiserem criar no ecrã, mas a maneira de interagir programando (por procedimentos) é simbólica, pelo que exige que a criança codifique os seus movimentos (ou os movimentos da tartaruga no ecrã do computador) usando palavras e números. Esta codificação pela criança é um aspecto crucial do ambiente de aprendizagem Logo e requer quantificação e formalização de constructos geométricos. A manipulação directa de objectos do ecrã através do movimento de um ponteiro em ambientes de Geometria Dinâmica não exige uma formalização prévia. Contudo, uma das restrições que os educadores encontram quando usam software dinâmico de geometria com crianças, é o nível de conhecimento geométrico necessário de forma a construir as figuras geométricas mais comuns como triângulos, quadrados, rectângulos ou paralelogramos.

Um micromundo, ao permitir construir um ambiente de aprendizagem informal restringindo-se às codificações e conhecimentos geométricos adequados ao nível dos alunos a que se destina, permite responder cabalmente às objecções antes referidas ao uso livre da linguagem Logo ou a uma exploração aberta com um software de Geometria Dinâmica. Por exemplo, Battista desenvolveu um micromundo, *Shape Maker*, dentro do Sketchpad com formas previamente construídas que podem ser manipuladas directamente pelas crianças, tentando ultrapassar assim as dificuldades baseadas na exigência do conhecimento de propriedades e relações geométricas que as crianças ainda estão a construir (Olive, 2002).

Na ideia de micromundo há dois aspectos complementares: as ideias matemáticas são incorporadas em sistemas interactivos, sendo tornadas concretas o que as torna manipuláveis; ao mesmo tempo significados podem emergir dos processos de abstracção, baseados na interacção com aqueles sistemas. Um micromundo, ambiente de aprendizagem informal, não pode ser considerado como aquele que fornece uma construção autónoma de significado, a noção de micromundo tem de ser alargado para incluir todo o sistema de ensino e aprendizagem, em particular o professor. Um micromundo não tem um papel de ensino, a não ser que esteja incluído de maneira relevante numa situação de ensino (Mariotti, 2002).

Neste trabalho optou-se por construir um micromundo baseado na linguagem Logo, designado por “micromundo Tarta” ou simplesmente TARTA. Pretendia-se um ambiente de

aprendizagem simples e fácil, para experimentar as transformações geométricas a nível do pré-primário e 1º ciclo do Ensino Básico, e para ser usado na aula por professores a gerirem toda a turma. O ambiente Logo era familiar à investigadora e para ela algumas das características daquele ambiente eram fulcrais. Uma delas é ser fundamentado numa pedagogia onde se espera que a criança vai: construir o seu próprio conhecimento; não se instalar no papel de ouvinte ou de respondente, por não ser um simples observador das actividades do professor; agir e interagir com material estruturado. Outra é que as actividades no ambiente Logo se articulam muito bem por projectos, permitem a auto-correcção pelo aluno da programação e das suas aprendizagens, eliminando-se assim a necessidade da correcção feita por um adulto (alguns alunos são sensíveis a tais correcções). Finalmente as actividades no ambiente Logo podem ajudar a promover a interacção social.

Assim foi decidido desenvolver um ambiente, o TARTA, dentro da linguagem de programação Megalog, versão mais actualizada do Logo para ambiente Windows 98. Para ultrapassar as dificuldades dos alunos jovens em codificar, quantificar e formalizar constructos geométricos, foram construídas duas formas básicas, um triângulo rectângulo e um quadrado, que podem ser movimentados (deslizar, virar e rodar) e combinados para formarem novas figuras por intermédio do uso de vinte comandos simples.

O micromundo Tarta pretende ser para os alunos um potencial de aprendizagem fomentando experiências em pensamento visual-espacial, ajudando a construir significados matemáticos, a estruturar intuições e a imaginar de uma forma dinâmica, favorecendo a criatividade. O micromundo Tarta pretende ser também um desafio para a investigadora na procura das consequências educativas resultantes das crianças trabalharem num ambiente catalizador do raciocínio mental e das relações espaciais.

1.3. Objectivos do estudo

Com este estudo no âmbito do pensamento visual-espacial e da sua aprendizagem, pretende-se :

1. Elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial, especificadamente:
 - a. Compreender o desenvolvimento do pensamento visual-espacial dos alunos à luz do modelo teórico, identificando os modos de pensamento visual-espacial e exemplificando como esses modos de pensamento visual-espacial foram sócio-culturalmente vividos.

- b. Identificar processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial que os alunos utilizaram na execução de tarefas geométricas com ênfase especial nos mecanismos conceptuais metáforas e gestos.
2. Desenvolver, isto é, conceber, implementar e avaliar dois modelos didácticos para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. Pretende-se em particular, reconhecer o nível de desenvolvimento geométrico evidenciado pelos alunos.

1.4. Uma visão geral da dissertação

Esta dissertação encontra-se estruturada em sete capítulos sendo o primeiro uma introdução ao estudo incorporando principalmente a sua pertinência e objectivos. O capítulo dois é uma revisão da literatura relacionada com o aprofundamento de tópicos que foram o sustentáculo do estudo. São eles a intuição, a abstracção, a actividade da mente segundo António Damásio, a imagética e as capacidades espaciais, a matemática corpórea, os mecanismos conceptuais metáforas e gestos, e a dimensão sócio-cultural da aprendizagem.

O capítulo três descreve a metodologia adoptada para este estudo, nomeadamente as suas diferentes vertentes metodológicas: desenvolvimento do modelo teórico, desenvolvimento dos ambientes de ensino, desenvolvimento e administração de tarefas geométricas, implementação dos ambientes de ensino e recolha e análise de dados. Esta última vertente está fundamentalmente relacionada com a refinação e avaliação do modelo teórico e com o nível de desenvolvimento geométrico dos alunos para movimentos elementares. Ainda neste capítulo são referidas limitações do estudo.

No quarto capítulo e em execução do primeiro objectivo proposto do estudo, descreve-se o modelo teórico inicial e colocam-se questões específicas sobre as quais esse modelo teórico vai ser avaliado. Também aí se apontam algumas limitações do modelo. No quinto capítulo confrontam-se os dados da experiência com o modelo teórico antes elaborado e faz-se a respectiva análise. O sexto capítulo satisfaz ao segundo objectivo do estudo descrevendo o desenvolvimento dos dois ambientes de ensino, destacando: o desenvolvimento do micromundo Tarta, o desenvolvimento das sessões de ensino, a elaboração dum programa de sensibilização das professoras aos ambientes de ensino e, a análise dos níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos alunos após as intervenções didácticas e com que se avaliam estas intervenções. Não foi intenção deste

estudo comparar as duas metodologias de ensino. O último capítulo finalmente apresenta as conclusões e as recomendações do estudo.

Capítulo II

Aprofundamento de tópicos fundamentais

Este capítulo tem por objectivo apresentar um aprofundamento dos grandes eixos sustentáculos deste trabalho: a intuição, a abstracção, a actividade da mente, a imagética e as capacidades espaciais, a matemática corpórea e os mecanismos conceptuais metáforas e gestos, a dimensão sócio-cultural da aprendizagem. Estes eixos são importantes porque referenciam vários aspectos que vão fundamentar o modelo teórico de pensamento visual-espacial elaborado: os processos mentais, a dimensão corpórea e a componente sócio-cultural. A partir de alguns destes eixos foram desenvolvidos construtos adaptados ao modelo teórico que será descrito no capítulo IV.

2.1. A intuição

No sentido de destacar o impacto das intuições na actividade de raciocínio matemático, vou descrever de forma muito sucinta, como o domínio de intuição fora visto por Fischbein, baseando-me no seu trabalho *Intuition in science and mathematics* (Fischbein, 1987). Farei também referência às respostas de matemáticos a uma entrevista sobre o tópico “intuição” (Burton, 1999).

O termo *intuição* refere-se a uma grande variedade de fenómenos cognitivos. O conhecimento intuitivo parece cobrir todo o domínio da cognição. Contudo o domínio de intuição é complicado, não só porque ela tem significados diferentes e contraditórios, como

muitos termos são usados em referência à mesma categoria de fenómenos (“*insight*”, *revelação*, *inspiração*, *senso comum*, *pensamento natural*).

Uma intuição, segundo Fischbein, é uma teoria, implica uma extrapolação para além da informação acessível directamente. Se alguém contempla duas rectas a intersectar-se, vê que os pares de ângulos opostos são iguais. Isto não é uma teoria, não requer qualquer intuição. Mas a frase “duas linhas que se intersectam determinam pares de ângulos opostos iguais” expressa uma generalização intuitiva. É a universalidade da propriedade que é aceite intuitivamente.

“Uma intuição é uma estrutura cognitiva complexa cujo papel é organizar informação disponível (mesmo incompleta) em representações praticamente significativas, auto-evidentes, internamente consistentes, notoriamente coerentes” (Fischbein, 1987, p. 211).

A intuição é aceite por alguns cientistas e filósofos e rejeitada por outros como potencial desencaminhador de toda a procura da verdade. Para alguns, a intuição significa uma fonte fundamental de conhecimento certo. Para outros, representa um método particular para compreender a verdade, a essência da realidade. Um terceiro emprego da palavra intuição é como um tipo especial de cognição caracterizada por propriedades como: ser auto-evidência e imediata, possuir uma certeza intrínseca, perseverança, coercividade, estatuto de teoria, extrapolação, globalidade, implicidade e função comportamental cognitiva.

A propriedade caracterizada por *auto-evidência e instantaneidade* (self-evidence e immediacy no original) quer significar que uma intuição cognitiva aparece subjectivamente ao indivíduo como directamente aceitável, sem necessidade de uma justificação extrínseca, seja ela uma prova formal ou um apoio empírico. A *certeza intrínseca* (intrinsic certainty) quer dizer que embora a evidência e a certeza estejam altamente correlacionadas, elas não se reduzem uma à outra. O sentir da certeza pode ter uma fonte extrínseca, por exemplo a autoridade do professor ou o apoio de uma prova. A *perseverança* (perseverance) é uma propriedade que traduz que as intuições são aquisições estáveis, resistentes a interpretações alternativas. *Coercividade* (coerciveness) quer significar que as intuições constroem as estratégias de raciocínio dos indivíduos e as suas escolhas de hipóteses e soluções. Na história da ciência e matemática, a influência coerciva das intuições tem muitas vezes determinado a perseverança de interpretações erróneas. A propriedade de possuir um *estatuto de teoria* (theory status) quer dizer que uma intuição é uma teoria expressa numa representação particular usando um modelo (paradigma, analogia, diagrama, constructo comportamental, etc.) nunca uma mera competência ou percepção, ela expressa uma propriedade geral percebida através de uma experiência particular. A *extrapolação* (extrapolativeness) é uma

propriedade que traduz que é através da intuição que extrapolamos indirectamente de uma quantidade limitada de informação para dados que estão para além da nossa compreensão directa, por exemplo do finito para o infinito. A *globalidade* (globality) exprime que uma intuição é uma cognição estruturada que oferece uma visão unitária de conjunto, em contraste com o pensamento lógico que é explícito, analítico e discursivo. A *inferência tácita* (implicitness) indica que, embora aparentemente auto-evidentes, as intuições são de facto baseadas em mecanismos complexos de selecção, globalização e inferência. Mas esta actividade é geralmente inconsciente e o indivíduo só está consciente do produto final, cognições intrinsecamente consistentes e manifestamente auto-evidentes. A *função cognitiva-comportamental das intuições* (cognitive-behavioural function of intuitions) adapta, prepara, inspira e guia a nossa actividade mental ou prática. Esta tarefa comportamental também pertence à percepção e assim a intuição deverá ter um número de características semelhantes a esta última: globalidade, estruturalidade, urgência, evidência e um alto nível de credibilidade intrínseca. Desta maneira as intuições são capazes de inspirar e guiar a nossa iniciativa intelectual firme e prontamente, mesmo em situação de informação incerta ou incompleta. É importante referir que percepção e intuição são cognições distintas. A percepção é também uma cognição imediata. Pode-se perceber a mesa que está à nossa frente, ninguém tem dúvidas sobre a sua existência. Não é preciso provar. Mas isto não poderá ser chamado conhecimento intuitivo.

Consideremos agora as classificações de Fischbein das intuições baseadas nas funções das intuições e nas origens das intuições. Relativamente à primeira classificação que considera a relação entre intuições e soluções podem-se distinguir intuições afirmativas, conjecturais, antecipatórias e conclusivas.

As *intuições afirmativas* são representações ou interpretações de vários factos aceites como certos, auto-evidentes e auto-consistentes, por exemplo “dois pontos determinam uma recta”. Uma intuição afirmativa pode referir-se: ao significado de um conceito, por exemplo o significado intuitivo de noções como ponto e linha; ao significado de uma relação ou afirmação, por exemplo “é necessária uma força para manter o movimento de um corpo”; a aceitação de uma inferência que pode ser indutiva ou dedutiva, por exemplo, “de $A=B$ e $B=C$ deduz-se como intuitivamente evidente que $A=C$ ”. As intuições afirmativas podem ser também classificadas em intuições básicas e individuais. Chamam intuições *básicas* aquelas representações básicas e interpretações que se desenvolvem naturalmente numa pessoa, geralmente durante a infância, e são partilhadas por todos os membros de uma certa cultura. As representações do espaço e do tempo, intuições relacionadas com causalidade, com propriedades físicas básicas, por exemplo pertencem a esta categoria. As intuições *individuais*

são representações pessoais relacionadas com a sua vida e actividade, por exemplo “Eu não acredito nas promessas do João, a minha intuição diz-me que ele é um mentiroso”.

As intuições *conjecturais* são suposições associadas com o sentir da certeza. Por exemplo “tenho a certeza que te tornarás num excelente engenheiro”.

As intuições *antecipatórias* são também conjecturas, mas têm sido classificadas separadamente, uma vez que pertencem explicitamente a uma actividade de resolução de problemas. Uma intuição antecipatória é uma visão global, preliminar de uma solução de um problema, a qual precede uma solução analítica completamente desenvolvida. Nem toda a hipótese é uma intuição; só as hipóteses que estão associadas desde o começo com o sentir de certeza e evidência são intuições antecipatórias. Elas não aparecem espontaneamente, são influenciadas por linhas de força determinadas por tendências intuitivas tácitas, as quais podem não estar em conformidade com restrições conceptuais formais.

Intuições *conclusivas* resumem numa visão global, as ideias essenciais da solução de um problema previamente elaborado. Esta visão completa e global adiciona à construção analítica formal um sentir de uma certeza intrínseca e directa.

A segunda classificação básica das intuições proposta por Fischbein refere-se à origem das intuições e diz respeito principalmente às intuições afirmativas. De acordo com este critério, podem-se distinguir intuições primárias e secundárias.

As *intuições primárias* (este termo não implica que estas intuições sejam inatas ou *a priori*) são aquisições cognitivas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer ensino sistemático, e são baseadas na experiência normal de todos os dias. Elas podem ser pré-operacionais e operacionais. Esta distinção assemelha-se à de Piaget relativamente aos estádios de desenvolvimento. Uma criança de cinco anos considera intuitivamente que alterando a forma dum bocado de argila também altera a quantidade ou o peso ou que ao andarmos, podemos fazer mover as nuvens. Nestes exemplos de intuições *pré-operacionais*, a apreciação é intuitiva global, sem hesitação, baseada em configurações em vez de critérios operacionais. Depois dos 6-7 anos, novas intuições se desenvolvem baseadas na composição e reversibilidade das operações intelectuais: intuições relacionadas com as capacidades de conservação, com as noções de número e cardinalidade com as operações elementares lógicas e aritméticas. “Porque é que as nuvens se movem mais ou menos depressa? Devido ao vento. Elas movem-se com o vento”. Uma criança de 10 anos ao tratar o equilíbrio numa balança, compreende intuitivamente que, no mesmo lado da balança o peso e a distância são inversamente proporcionais. Não há nenhuma análise formal explícita da situação feita pela criança. Estes são exemplos de reacções intuitivas *operacionais*. As intuições operacionais que se desenvolvem durante o período operacional concreto

permanecem como aquisições estáveis para toda a vida. Durante o período operacional formal nenhuma mudança fundamental a nível intuitivo tomam lugar espontaneamente.

Intuições secundárias são aquisições cognitivas adquiridas, não através de uma experiência natural, mas através de uma intervenção educativa sistemática. Muitas vezes estas intuições secundárias são inconsistentes com as correspondentes intuições primárias relacionadas com os mesmos conceitos. A frase “a soma dos ângulos internos dum triângulo é 180° ”, não é auto-evidente. Aceita-se provando. Acima de tudo é surpreendente aprender que seja qual for o triângulo, a soma dos seus ângulos internos permanece constante. Se por certos meios (por exemplo, usando a Geometria da Tartaruga baseada no Logo) formos capazes de ver directamente que a soma deve permanecer constante, adquirimos uma compreensão intuitiva nova, uma intuição secundária.

É importante destacar que intuições novas e correctas não substituem simplesmente as primitivas e incorrectas. As intuições primárias são geralmente tão resistentes que podem coexistir com as novas, superiores e cientificamente aceitáveis. A distinção entre intuições primárias e secundárias também não é absoluta. Por um lado, pode-se considerar antes um contínuo que se estende desde cognições intuitivas, elementares naturalmente adquiridas (por exemplo, a conservação de quantidades) a noções genuinamente contra-intuitivas muito complexas (como o espaço a n dimensões). Entre estes extremos há uma infinidade de nuances de cognições adquiridas mais ou menos naturalmente ou mais ou menos contra as nossas tendências intuitivas naturais. A distinção entre intuições primárias e secundárias depende ainda do ambiente cultural do indivíduo.

As intuições são sempre o produto de experiência pessoal, do envolvimento pessoal, numa certa actividade prática ou teórica. Só quando fazemos frente activamente a certas situações é que se necessita de tais representações globais, antecipatórias e notoriamente auto-consistentes. O desenvolvimento de novas intuições, secundárias, matemáticas e científicas implica situações didácticas onde ao estudante é pedido, avaliar, conjecturar, prever, imaginar e verificar soluções. A experiência então joga por um lado um papel fundamental na formação das intuições. A experiência pode gerar intuições, não só gerando padrões estáveis de reacções mas também sistemas de crenças organizados e manifestamente autónomos. Quando, por exemplo, uma criança desenha uma linha recta, ela evidencia uma competência. Quando afirma que uma linha pode ser estendida indefinidamente, ela expressa uma intuição. Esta intuição está relacionada com a sua experiência. Ela aprendeu que a pode estender quanto quiser, basta ter papel suficiente.

Por outro lado a experiência pode também distorcer as nossas interpretações primárias intuitivas devido a restrições permanentes. Há limitações terrestres da experiência humana de

tempo, de espaço e de possibilidades. As nossas intuições espaciais são essencialmente finitas em natureza – a noção de infinito, por exemplo, conduz a contradições lógicas. A nossa representação intuitiva do espaço é uma mistura de propriedades possivelmente contraditórias, todas relacionadas com a nossa vida na Terra e com as nossas restrições comportamentais adaptáveis. É insuportável um mundo onde as coisas não “caem” mas “permanecem onde estão”. Uma das virtudes das cognições intuitivas é a possibilidade de extrapolação mas a direcção e a natureza dessa extrapolação dependem das condições em que se baseia a experiência da pessoa e dos dados que essa experiência fornece. Uma outra restrição, que pode enviesar as intuições primária, é o aspecto prático dos significados intuitivos. Quer isto dizer que alguém tende intuitivamente a atribuir propriedades a noções e a operações mentais que correctamente falando, pertencem só a realidades concretas, materiais (ser finito, ser concreto, impossibilidade de ubiquidade).

Fischbein aponta como factores que contribuem para formar intuições, para além da experiência acumulada por uma pessoa em condições relativamente constantes já referida, vários tipos de modelos – analogias, paradigmas, diagramas, primitivas fenomenológicas – e factores que produzem efeitos de evidência intrínseca e de globalização. Dois sistemas dizem-se *analógicos* se, na base de uma certa semelhança parcial, alguém se sente autorizado a supor que as entidades respectivas são similares também em outros aspectos. *Analogias* implicam então semelhança de estrutura. Modelo *paradigmático* é um exemplar de uma categoria que é usado como representativo de uma categoria integral. *Diagramas* representam intuitivamente a realidade original por intermédio de uma estrutura conceptual; não há uma analogia natural, auto-evidente entre o original e o modelo. *Primitivas fenomenológicas* são modelos intuitivos elementares e fenomenológicos, isto é, são estruturas cognitivas simples que são evocadas como um todo e que têm uma função interpretativa (Fischbein, 1987).

O factor experiência como promotor do aparecimento das intuições, os vários e contraditórios significados de intuição e os variados termos usados em referência à mesma categoria de fenómenos são ainda considerados e referidos por 70 matemáticos entrevistados por Burton (1999) no sentido de este tentar explorar o que eles tinham a dizer sobre “intuição”. Burton encontrou que para a maior parte daqueles matemáticos, intuição, “insight” ou instinto era visto como uma componente necessária para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Embora a maior parte dos participantes tinham um forte sentido de fazer uso de algo que chamavam “intuição”, “insight” ou “instinto”, não houve concordância se aqueles termos representavam estados diferentes e característicos e se sim, como esses estados podiam ser reconhecidos. Houve acordo que evidentemente intuição não era sempre suficiente, mas reforçava-se o sentir que a partir dela se via uma direcção, se bem que

precaução era necessária. Nenhum daqueles matemáticos ofereceu qualquer comentário se ou como ele tinha formado as suas próprias intuições como parte dos seus processos de aprendizagem. Assim há pergunta de onde vem a intuição, Burton refere por um lado a ideia de Hersh “intuição, não é uma percepção directa de algo externo. É o efeito de manipular objectos concretos na mente/cérebro – num estágio posterior, de construir marcas num papel e ainda mais tarde de manipular imagens mentais. Esta experiência deixa um traço, um efeito na nossa mente/cérebro” (p. 29). Por outro lado, Burton identifica que os factores conhecimento e experiência, foram os principais factores que os matemáticos entrevistados explicaram para o seu sucesso em conseguir intuições ou “insights”, embora alguns matemáticos acreditassem que ter ou não ter intuições tinha presumivelmente uma explicação genética. Para os matemáticos que participaram no estudo, a intuição não sendo incontestável, incorpora o subjectivo, o que explica porque a fiabilidade é tão importante, já que ter boas intuições significa supostamente que temos sucesso no nosso trabalho, escrevemos muitos artigos e alcançamos reconhecimento.

Os diferentes tipos de intuição propostos por Fischbein foram usados no desenvolvimento do modelo teórico de pensamento visual-espacial descrito no capítulo IV.

2.2. A abstracção

Considero a abstracção um processo cognitivo necessário e crítico para o raciocínio matemático. Não existindo um significado único para a abstracção, é consensual contudo que: a abstracção pode ser examinada de diferentes perspectivas, certos conceitos são mais abstractos que outros, e que a capacidade de abstrair é uma competência importante para um envolvimento significativo com a matemática (Hazzan e Zazkis, 2003).

Neste estudo, o processo mental abstracção, vai ser distanciado, da problemática da sua definição: como “um processo de descontextualização” (Dreyfus e Gray, 2002, p. 121) ou “um processo que começa de uma forma inicial e não desenvolvida de conhecimento e termina com uma estrutura de conhecimento elaborada e consistente” (Dreyfus e Gray, 2002, p. 121) ou “um processo que está ligado a uma progressão do raciocínio matemático informal para um raciocínio mais formal o qual por sua vez está ligado à criação duma realidade matemática nova” (Dreyfus e Gray, 2002, p. 126).

Contudo as ideias e terminologia sobre a *abstracção* de Piaget vão ser usadas neste estudo, no intuito de compreender e “ver” quais as faces e níveis de abstracção que podem estar subjacentes ou são valorizadas nos vários modos de pensamento visual-espacial.

Piaget distinguiu três grandes tipos de abstracção: a abstracção empírica, a abstracção pseudo-empírica e abstracção reflexiva. A *abstracção empírica* deriva do conhecimento das propriedades dos objectos, ou seja o sujeito internamente extrai informação dos próprios objectos, retendo algumas das suas propriedades e excluindo outras. Segundo Piaget, esta espécie de abstracção conduz à extracção de propriedades comuns de objectos e a generalizações, isto é à passagem de “alguns” para “todos”, do específico para o geral, generalização indutiva (Vuyk, 1981). Podíamos pensar, por exemplo, na cor de um objecto ou no seu peso. Estas propriedades podiam ser consideradas residir inteiramente no objecto mas alguém só pode ter conhecimento delas fazendo algo (olhando para o objecto a uma certa luz, sopesando-o) e diferentes indivíduos sujeitos a condições diferentes podem chegar a diferentes conclusões sobre aquelas propriedades.

A *abstracção pseudo-empírica* é intermediária entre a abstracção empírica e a abstracção reflexiva e destaca propriedades que as acções do sujeito introduziram nos objectos. Por exemplo, consideremos a observação da correspondência de 1-1 entre dois conjuntos de objectos, que tinham sido postos em alinhamento pelo sujeito. O conhecimento desta situação pode ser considerada empírica porque tem a ver com objectos, mas é a sua configurações no espaço e as relações a que isto conduz que interessa e estas são devidas às acções do sujeito.

A *abstracção reflexiva* é a construção pelo sujeito de objectos mentais e de acções mentais sobre esses objectos. Por exemplo, na actividade de seriação, a criança executa várias acções individuais de formar pares, ternos, etc e então interioriza e coordena as acções para formar uma ordenação total (Dubinsky, 1991).

As abstracções reflexivas conduzem a *generalizações construtivas*. Enquanto a *generalização indutiva* é limitada a assimilação de novos observáveis nos esquemas existentes, a generalização construtiva cria novas formas e novos conteúdos, isto é, uma nova organização estrutural (Vuyk, 1981). A abstracção reflexiva difere da empírica que trata de acções em vez de objectos e difere da abstracção pseudo-empírica porque está relacionada não tanto com as próprias acções, mas com as interrelações entre as acções (Dubinsky, 1991). A abstracção pseudo-empírica é uma sub-variedade da abstracção reflexiva e é também chamada uma “aplicação” de operações e estruturas a objectos (Vuyk, 1981).

Piaget introduziu o conceito de abstracção reflexiva para descrever a construção, por um indivíduo, de estruturas lógico-matemáticas durante no decurso do seu desenvolvimento cognitivo. Ainda juntou duas observações importantes: a abstracção reflexiva não tem nenhum começo absoluto, mas está presente na coordenação de estruturas sensorio-motoras em idades muito jovens; ela continua a crescer através das matemáticas mais elevadas de tal maneira que a história do desenvolvimento da matemática desde a antiguidade até aos nossos

dias pode ser considerada como um exemplo do processo de abstracção reflexiva. A abstracção reflexiva aparece como uma descrição do mecanismo do desenvolvimento do pensamento intelectual. Este mesmo processo aparece no desenvolvimento cognitivo durante toda a vida, desde as primeiras coordenações da criança que conduzem a conceitos tais como o número, medição, multiplicação e proporção (Dubinsky, 1991).

A abstracção em forma e espaço, tanto a empírica como a reflexiva, conduz a um desenvolvimento do tipo descrito por Van Hiele onde vemos tanto a dominância crescente da descrição verbal sobre a percepção visual como a linguagem a refinar a imagética e a conduzir a formas cada vez mais sofisticadas de estrutura matemática e de prova matemática (Gray e Tall, 2002).

As ideias e a terminologia sobre a abstracção de Piaget e Dubinsky foram usadas no modelo de pensamento visual-espacial descrito no capítulo IV.

2.3. A actividade da mente

De uma forma sucinta apresento como António Damásio postula o funcionamento da mente. Devido à estruturação do cérebro, diz Damásio (1994), o conhecimento geral necessário para raciocinar depende de vários sistemas localizados, não numa única região, mas em regiões cerebrais relativamente separadas. A uma grande parte de tal conhecimento tem-se acesso como imagens não de um único, mas de muitos locais do cérebro. As imagens sobre as quais raciocinamos não só devem estar “focadas” – algo que se atinge pela atenção – como devem também ser “mantidas activas na mente” – algo que é realizado pela memória de trabalho. O cérebro retém e acede ao conhecimento que está distribuído espacialmente e quando a este acede na forma de imagens, o conhecimento pode ser manipulado ao longo do tempo. O cérebro é um super-sistema de sistemas. Cada sistema é composto por uma complexa interligação de pequenas, mas macroscópicas, regiões corticais e núcleos subcorticais, que por sua vez são constituídos por circuitos locais, microscópicos, formados por neurónios, todos eles ligados por sinapses.

Segundo Damásio, os níveis mais baixos do edifício neurológico da razão são os que regulam o processamento das emoções e sentimentos e ainda as funções do corpo necessárias para a sobrevivência do organismo. Por sua vez, estes níveis mais baixos mantêm relações directas e recíprocas com praticamente todos os órgãos do corpo, colocando este directamente na cadeia das operações que dá origem aos desempenhos de mais alto nível da razão, isto é, da tomada de decisão, e, por extensão, do comportamento social e da capacidade criadora.

O conhecimento factual necessário para o raciocínio e para tomada de decisões chega à mente sob a forma de imagens perceptivas ou evocadas. Estas diversas imagens, quer as perceptivas, quer as evocadas, são construções do nosso cérebro e parecem ser geradas por uma maquinaria neural complexa de percepção, memória e raciocínio. A construção de imagens *perceptivas*, é por vezes regulada pelo mundo exterior ao cérebro, isto é, pelo mundo que está no nosso corpo ou à volta dele, com uma pequena ajuda da memória do passado. As imagens *evocadas* ocorrem à medida que evocamos uma recordação de coisas do passado ou fazemos planos para o futuro, sendo a sua construção dirigida pelo interior do nosso cérebro.

A actividade neural mais intimamente relacionada com as imagens que experimentamos ocorre apenas nos córtices sensoriais iniciais. As imagens são baseadas directamente nas representações neuronais e são topograficamente organizadas. A presença no cérebro de padrões neurais dinâmicos, ou seja, de mapas relacionados com um objecto ou acontecimento, é uma condição necessária mas não suficiente para explicar a emergência de imagens mentais de um dito objecto ou acontecimento. A forma como os padrões neurais se transformam em imagens mentais não está ainda esclarecida (Damásio, 2003).

As imagens perceptivas e as imagens evocadas são formadas ou sob o controlo de receptores sensoriais orientados para o exterior do cérebro (por exemplo a retina) ou sob o controlo de *representações disposicionais* (ou *disposições*) contidas no cérebro, em regiões corticais e núcleos subcorticais. Para os sinais vindos da retina, a recepção dar-se-á nos córtices visuais iniciais, localizados na parte posterior do cérebro, no lobo occipital onde aqueles formam representações neuronais topograficamente organizadas necessárias para a ocorrência de imagens conscientes. As representações neuronais têm também de estar correlacionadas de forma essencial com aquelas que, de momento a momento, constituem a base neuronal para a construção do “eu”.

Damásio (1994) suspeita que as imagens mentais explícitas que evocamos surgem da activação sincrónica e transitória de padrões de disparo neural que, em larga medida ocorrem nos mesmos córtices sensoriais iniciais onde os padrões de disparo correspondentes às representações perceptivas ocorreram outrora. A activação resulta numa representação topograficamente organizada. As representações topograficamente organizadas, que são necessárias para experimentar imagens evocadas, são momentaneamente construídas sob o comando de padrões neurais *disposicionais* que foram adquiridos em outros locais do cérebro. O termo disposicional é usado para indicar o que os padrões neurais fazem: dão ordens a outros padrões neurais para tornarem possível que a actividade neural ocorra noutro sítio, em circuitos que fazem parte do mesmo sistema e com os quais se estabeleceu uma forte interconexão neuronal. As representações disposicionais são padrões potenciais de actividade

neuronal, em pequenos grupos de neurónios a que se chamam grupos de convergência. As disposições relacionadas com imagens evocáveis foram adquiridas por experiência, e por isso podemos dizer que constituem uma memória. O que as representações disposicionais guardam nas suas pequenas comunidades de sinapses, não é uma imagem *per se*, mas um meio para reconstruir um esboço dessa imagem.

As representações disposicionais são então uma potencialidade de disparo dormente e não consciente que ganha vida quando os neurónios disparam com um determinado padrão, a um determinado ritmo, num determinado intervalo de tempo, e em direcção a um alvo particular, que é outro conjunto de neurónios. As disposições conservam registos relativos a uma imagem que foi percebida numa ocasião anterior e ao recordar participam na tentativa de reconstruir uma imagem semelhante. As disposições também ajudam a percepção das imagens durante o seu processamento, influenciando, por exemplo o grau de atenção concedido às imagens presentes. As disposições podem produzir uma grande variedade de acções: a libertação de uma hormona na circulação sanguínea, a contracção dos músculos das vísceras, ou dos músculos dum membro, ou dos músculos necessários à vocalização (Damásio, 2000).

As representações disposicionais constituem o nosso depósito integral de conhecimento e incluem tanto conhecimento inato como adquirido através da experiência. O conhecimento inato baseia-se em representações disposicionais existentes no hipotálamo, no tronco cerebral e no sistema límbico. Podemos concebê-lo como comandos de regulação biológica necessários para a sobrevivência (isto é, o controlo do metabolismo, dos impulso e dos instintos). Eles controlam muitos processos, mas, de um modo geral, não se transformam em imagens da mente.

O conhecimento adquirido baseia-se em representações disposicionais existentes tanto nos córtices de alto nível (regiões occipital, temporal, parietal e frontal) como ao longo de muitos núcleos de massa cinzenta localizados abaixo do nível do cortex. Algumas das representações disposicionais que envolvem o conhecimento adquirido contêm registos sobre o conhecimento imagético que podemos evocar e que é utilizado para o movimento, o raciocínio, a planificação e a criatividade; e algumas contêm registos de regras e de estratégias com as quais manipulamos essas imagens. A aquisição de conhecimento novo é conseguida pela modificação contínua dessas representações disposicionais.

Damásio (1994) salienta ainda que as imagens são provavelmente o principal conteúdo dos nossos pensamentos, independentemente da modalidade sensorial em que são geradas e independentemente de serem sobre uma coisa ou sobre um processo que envolve coisas; ou sobre palavras ou outros símbolos, numa dada linguagem que correspondem a uma coisa ou a

um processo. Escondidos por detrás dessas imagens, raramente ou nunca chegando ao nosso conhecimento, existem numerosos mecanismos que orientam a geração e o desenvolvimento dessas imagens no espaço e tempo. Esses mecanismos utilizam regras e estratégias incorporadas em representações disposicionais. Eles são essenciais para a nossa cogitação, mas não constituem o conteúdo dos nossos pensamentos. Na perspectiva de Damásio (2003) parte do que pode ser mapeado nas regiões sensoriais do nosso cérebro e que emerge na nossa mente sob a forma de uma ideia tem a sua origem em estruturas do corpo que se encontram num determinado estado e em determinadas circunstâncias.

2.4. Imagética e capacidades espaciais

Até ao ano de 1981, a literatura sobre imagética visual e capacidade espacial tem sido desenvolvida independentemente apesar de entre os psicólogos ser quase de aceitação universal, que a imagética visual está necessariamente envolvida em tarefas espaciais (Clements, 1981). Termos como imagética visual e capacidade espacial estão muitas vezes ligados em estudos relacionados com as competências matemáticas na escola elementar e, por exemplo, Krutetski sustenta que nas suas experiências, a capacidade de visualizar relações abstractas e a capacidade para conceitos geométricos espaciais mostram uma alta correlação (referido em Pesci, 1995). Battista (1990, 1994) diz que há uma relação significativa entre a capacidade espacial e a execução em matemática e também afirma que a relação entre capacidade espacial e capacidade matemática baseia-se no facto das operações executadas, ao actuar com modelos mentais em matemática, serem muitas vezes as mesmas que as usadas para operar em ambientes espaciais.

Vou de forma sucinta apresentar agora uma revisão de literatura sobre os mecanismos imagética e capacidades espaciais, concluindo com as consequências para o modelo teórico.

2.4.1. Imagética

A imagética suscita, desde há muito, o interesse de filósofos e psicólogos. Por volta de 1870, o estudo da mente era o grande foco da psicologia científica. No princípio da psicologia experimental, no apogeu do associacionismo, a imagem era considerada como sendo ao mesmo tempo: 1) um produto directo não só da percepção mas da própria sensação da qual se supunha constituir o vestígio residual; 2) um dos dois elementos fundamentais do pensamento, ao lado da associação, sendo o pensamento um sistema de associação entre

imagens; 3) uma cópia adequada dos objectos ou dos acontecimentos, e de maneira nenhuma como um símbolo subordinado a um jogo de operações.

Por volta de 1903, descoberta a existência dum “pensamento sem imagem” por Binet e pelos psicólogos alemães da escola de Wurzburg, concluiu-se que a imagem devia deixar de ser considerada como um elemento do pensamento, constituindo quando muito um auxiliar simbólico complementar da linguagem. A análise da imagem passa então para segundo plano (Piaget e Inhelder, 1977).

Apesar de ter sido debatido o papel da imagética no pensamento – por exemplo Bühler em 1908 concluiu “que em princípio qualquer assunto pode ser pensado e expresso completamente e distintamente sem ajuda da imagética” – as conclusões à volta do papel da imagética, permaneceram insatisfatórias. Contudo ambas as partes em contenda, “pensamento com ou sem imagem”, concordaram tacitamente em que a imagética podia estar envolvida em pensamento só se se tivesse consciência dela. Arnheim (1969) referiu também que a imagética pode estar acessível à consciência, mas os observadores não estão equipados para a reconhecer. Talvez eles não registem a presença das imagens, porque o que eles experimentam, não corresponde à noção do que a imagem é.

O interesse pela imagética só foi retomado na literatura psicológica, nos anos 70 do século XX, tornando-se outra vez, um tópico importante. Três factores conduziram à sua entrada e aceitação. Primeiro, os próprios behavioristas começaram a falar sobre operações mentais ocultas internas, postulando ligações invisíveis de estímulos-respostas. Segundo, a psicologia cognitiva tinha desenvolvido métodos experimentais para testar as suas predições, baseadas em construtos sobre a memória humana e o processamento da informação. Terceiro, o avanço da tecnologia do computador reavivou o interesse pela imagética.

No começo de 1990, a imagética restabeleceu-se claramente como um grande tópico da psicologia. As aplicações da imagética têm-se espalhado em educação e em psicologia de saúde mental, em treino em criatividade para crianças e adultos, e em outras áreas onde o objectivo é melhorar a capacidade de execução humana (Houtz e Patricola, 1999).

Os debates sobre processos imagéticos categorizam-se segundo dois pontos de vista. Uma abordagem, ligada à teoria da imagética da *codificação dual* de Paivio onde se postula haver dois meios separados e desligados para a codificação de informação – um fundamentalmente pictórico e o outro verbal. Uma outra abordagem sustenta que as imagens são reconstruções de estruturas de conhecimento proposicionais que se encontram armazenadas. Estes conhecimentos *proposicionais* incluem descrições codificadas de objectos que são percebidos e imaginados, bem como regras adquiridas ou processos para manipular as imagens (Houtz e Patricola, 1999).

Dreyfus (1995) diz que parece que não temos espelhos nas nossas cabeças: as nossas imagens visuais contêm abstracções e variações fortemente interpretadas do que vimos; os seus elementos lógicos e pictóricos estão fortemente misturados. Além disso, a nossa capacidade de transformar mentalmente essas imagens é limitada pela capacidade de reter tais imagens e pode assim ser fortemente melhorada por apoio visual externo. Dreyfus parece aqui transparecer uma perspectiva diferente da codificação dual ou da perspectiva proposicional para a codificação de informação.

Vejamos diferentes contribuições para a compreensão dos processos imagéticos e que podem ser valiosas em termos de potencial para a educação matemática. Para Piaget e Inhelder a imagética mental era uma construção motora criativa na base da experiência sensorial e como tal é fundamentalmente diferente da percepção sensorial, na medida de que depende grandemente de esquemas de assimilação e acomodação, e não de efeitos de campo imediatos como acontece com percepção sensorial. Contudo Piaget insistia na primazia das operações mentais sobre as imagens, enquanto que Inhelder considerava a imagética como apoio material para as acções mentais (Vonèche, 2001).

Piaget e Inhelder (1979) sugerem que as imagens mentais aparecem relativamente tarde e resultam de uma imitação interiorizada. Distinguem duas grandes categorias de imagens mentais: as *imagens reprodutoras*, que evocam objectos ou acontecimentos já conhecidos e as *imagens antecipadoras*, as que representam por imaginação figurativa, acontecimentos não percebidos anteriormente, quer se tratasse de movimentos ou transformações quer dos seus fins ou resultados. Para as imagens reprodutoras ainda foram consideradas três sub-categorias: as imagens reprodutoras *estáticas* (quando elas dizem respeito a um objecto ou a uma configuração imóveis, por exemplo, a imagem duma recta); as imagens reprodutoras *cinéticas* (quando evocam figurativamente um movimento, por exemplo, a reprodução de dois movimentos com as mesmas velocidades constantes cruzando-se um com o outro); as imagens reprodutoras de *transformação*¹ (se elas representam de maneira figurativa transformações já conhecidas do sujeito, por exemplo, a transformação de um arco numa linha recta por sujeitos que já tivessem já feito a experiência com verificação perceptiva num arame ao qual se modifica progressivamente a forma). Para as imagens antecipadoras foram consideradas analogamente também sub-categorias: as imagens antecipadoras *cinéticas* e as imagens antecipadoras *de transformação* (não familiar na experiência passada da criança ou pelo menos como são apresentadas). Não foram consideradas imagens antecipadoras estáticas,

¹ Transformação é referida como uma alteração de forma e deslocamento designa uma mudança de posição sem modificação de forma (Piaget e Inhelder, 1977).

porque para antecipar pela imagem uma situação estática que não se conhece, a criança terá que ter em conta movimentos ou transformações de que esta situação resulta.

Segundo Piaget e Inhelder (1977) os dois grandes períodos do desenvolvimento das imagens correspondem ao nível pré-operatório (antes dos 7-8 anos) e ao nível operatório. No nível pré-operatório, as imagens mentais da criança são quase exclusivamente estáticas e por consequência incapazes de representar os movimentos e transformações, mesmo só nos seus resultados, assim como, e *a fortiori*, de antecipar os processos ainda não familiarmente conhecidos. Pelos 7-8 anos, pelo contrário inicia-se uma capacidade de antecipação imagética, que permite então a reconstituição dos processos cinéticos ou de transformação, e mesmo a previsão das sequências novas e simples.

Gray e Pitta (1999) vêm o conceito de imagem como uma componente importante da cognição: uma referência mental que é o produto de imaginar numa qualquer modalidade visual, verbal, olfactiva, auditiva ou cinestésica. Neste estudo investigando os modos como diferentes imagens mentais identificadas de respostas a “deixas e ligações” podem influenciar as abordagens das crianças na aritmética elementar, seguem a seguinte classificação para a imagética: imagens gerais, imagens específicas e imagens autobiográficas. *Imagens gerais* representam um conceito sem qualquer referência a um exemplo particular ou a características do item. *Imagens específicas*, possuem uma referência a um exemplo bem definido do conceito, sem um episódio específico. *Imagens autobiográficas* são casos especiais de imagens específicas ampliadas de modo a incluir um esquema que envolveu o sujeito sem uma referência episódica ou com objectos pertencentes ao sujeito. Gray e Pitta parecem situar-se numa perspectiva de codificação de informação mais próxima da perspectiva proposicional.

M. Johnson (1987) desenvolveu o constructo *esquema imagético* como uma estrutura esquemática operando constantemente na nossa percepção, no nosso movimento corpóreo através do espaço e na nossa manipulação física de objectos. Assim os *esquemas imagéticos* são encorporados, não são formulações proposicionais, não são estruturas abstractas de sujeito-predicado. Por outro lado, os *esquemas imagéticos*, não são imagens concretas, ricas (figuras mentais que podem ser remontadas da experiência sensorial), nem figuras mentais. São estruturas que organizam as nossas representações mentais *a um nível mais geral e abstracto* do que aquele no qual nós formámos imagens particulares mentais. Os esquemas imagéticos têm alguns elementos básicos ou componentes que estão relacionados com estruturas definidas que emergem principalmente ao nível da percepção física ou corpórea e movimento. Por exemplo, o esquema imagético “DE – PARA ou CAMINHO” consiste em três elementos (um ponto A fonte, um ponto B terminal e um vector que traça o caminho entre

os pontos) e uma relação (especificada pelo vector força que se move de A para B). Este esquema “DE – PARA” é uma estrutura que se repete num número de acontecimentos aparentemente diferentes, tais como: (a) passear dum lado para outro; (b) dar à mãe um presente; (c) picar o irmão. Para cada um destes casos diferentes, temos o mesmo esquema, com as mesmas partes básicas e relações. Os esquemas imagéticos são abstractos e não são limitados só a propriedades visuais, isto é, tendo em conta, a pesquisa com cegos, parece que esquemas imagéticos transcendem qualquer modalidade sensorial, embora envolvam operações que são análogas a manipulação espacial, orientação e movimento.

Dörfler (1991) concentrou-se no construir significado para objectos matemáticos, termos, teorias e similares. Assim, baseando-se no conceito de esquema imagético desenvolvido por Johnson (1987), apresentou uma teoria de significado de conceitos quando estes são construídos individualmente. O significado é visto como induzido por imagens mentais concretas, o oposto a abordagens proposicionais. Um *esquema imagético* é para Dörfler, uma estrutura esquemática que numa forma altamente estilizada descreve ou exhibe as características principais e relações de situações e processos aos quais potencialmente a palavra se refere. Os esquemas imagéticos estão portanto intimamente ligados a percepções e movimentos e apresentam as características tomadas como importantes pelo indivíduo. Acresce que os esquemas imagéticos são usados para construir relações cognitivamente manipuláveis e compreensíveis. Dörfler vê então um *esquema imagético* como a interacção cognitiva e ou perceptiva *com* e manipulação *de* alguma espécie de modelo (esquema geométrico) como objecto, seja ele um material, um desenho ou seja só imaginado. Chamou ao modelo o *portador* (concreto) do esquema imagético. Muitas (mas não todas) das bem conhecidas assim chamadas representações para conceitos matemáticos podem servir potencialmente como portador de um esquema imagético relacionado.

Um esquema imagético como processo cognitivo não pode ser partilhado com ninguém, só os portadores podem ser comunicados e em alguns casos as manipulações cognitivas pertinentes têm uma forma material correspondente de manipular o portador. O esquema imagético é precisamente uma forma específica de ver, interpretar, usar, transformar, o portador. É enganador encarar o portador concreto como representante do respectivo conceito. Podia ser muito mais apropriado dizer que os indivíduos, por relações cognitivas *para* o portador concreto e por actividades *com* o portador concreto, apresentam eles próprios o conceito, isto é, tornam o conceito presente cognitivamente e mentalmente. Um mesmo objecto pode ser o portador concreto para diferentes esquemas imagéticos correspondendo a diferentes conceitos. Inversamente, o mesmo conceito geralmente admite uma variedade de esquemas imagéticos baseados em diferentes portadores. Isto depende das propriedades,

relações, proporções, transformações, etc. vistas como relevantes, sobre quais a atenção vai ser focada e são construídas pelo indivíduo. Esquemas imagéticos são mecanismos centrais para dar significado e guiar muitas actividades conceptuais e cognitivas.

Para Dörfler (1991) nem a memória, nem operações cognitivas (como argumentação e inferências lógicas) parecem ser baseadas sómente em meios linguísticos, mas têm uma base concreta sob a forma de esquemas imagéticos apropriados e seus portadores. O significado subjectivo dos termos matemáticos tem uma componente, não-verbal, não-proposicional e geometricamente objectiva. A compreensão individual de um tópico matemático possivelmente é melhor conseguida quando há uma espécie de acção combinada entre expressões proposicionais e os correspondentes esquemas imagéticos. Dörfler descreveu quatro tipos de esquemas imagéticos, dependendo esta classificação, do esquema imagético como um todo e não só do portador: o figurativo, o operativo, o relacional e o simbólico.

No esquema imagético *figurativo*, esquema puramente perceptivo, não há transformações ou operações levadas a cabo com o portador. O portador muitas vezes mostra características diferentes, propriedades e relações que guiam ou atraem a atenção e a actividade perceptiva do aluno, de forma que há uma boa chance de este desenvolver um esquema imagético apropriado. Se isto acontece, o portador objectivo em certo sentido, “representa” o conceito correspondente ao esquema imagético. Esquemas imagéticos para conceitos geométricos, como círculo, quadrado, por exemplo, podem ser de carácter figurativo, mesmo se isto não se ajusta à compreensão esperada para aqueles conceitos. Os desenhos usuais são então portadores concretos, mas por certo outras “representações” podem servir o mesmo propósito.

Um esquema imagético *operativo* é um esquema de operações sobre o portador e com o seu portador. Assim o seu conteúdo principal consiste em operações específicas (transformações, produções). O portador pode ser material, descrito ou imaginado. Este esquema imagético compreende sobretudo operações (materiais e mentais) com o portador concreto e processos sobre o seu portador concreto. O portador também será esquematizado e presta-se especificamente à execução de operações (materiais ou mentais) constituindo o esquema imagético. O esquema imagético operativo, tal como o sistema imagético figurativo tem de ser construído e adquirido pelo aluno e é muito importante uma orientação estruturada pelo professor. Para muitos conceitos matemáticos, os esquemas imagéticos deveriam compreender uma componente operativa que complemente o aspecto figurativo. Por exemplo, o desenho da figura 2.1 pode ser o portador concreto do esquema imagético operativo para os conceitos de rotação.

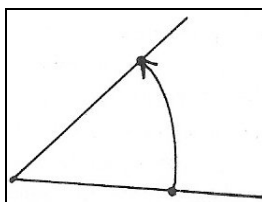


Fig. 2.1. Portador de esquema imagético operativo para a rotação (adaptado de Dörfler, 1991, p. 26).

Também o desenho da figura 2.2 pode ser o portador concreto do esquema imagético operativo para o conceito de reflexão em torno de uma linha.

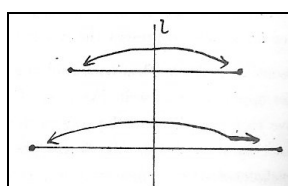


Fig. 2.2. Portador de esquemas imagético operativo para a reflexão (adaptado de Dörfler, 1991, p. 26).

Ainda, por exemplo, quando tomámos o conceito de segmento recta como um modelo para o contínuo ele é um esquema imagético operativo. Este esquema não é só figurativo pois quando se associa operações específicas (divisibilidade ilimitada e em partes iguais) com o portador (por exemplo, um segmento de recta desenhado) obtemos um esquema imagético apropriado. É a execução destas operações que tornam a figura de um segmento de recta num contínuo. Esta execução não é uma propriedade do portador concreto, mas é puramente cognitiva (Dörfler, 1991).

O esquema imagético *relacional* é aquele cujo conteúdo essencial consiste em relações construídas no portador concreto. Aquelas relações não são imediatamente percebidas mas necessitam de ser mediadas e construídas cognitivamente. Esta mediação muitas vezes é fornecida por certas transformações ou operações (materiais ou mentais) sobre o portador concreto. É evidente que muitos esquemas imagéticos matemáticos serão relacionais também. Por exemplo consideremos o círculo, cuja relação de definição entre outras – corresponde a rodar um desenho do círculo em si próprio, de um ângulo arbitrário, ou a rodar um segmento de recta que está fixo numa das extremidades (Dörfler, 1991).

O esquema imagético *simbólico* implica uma visão específica sobre os seus portadores concretos, olhando partes e elementos como variáveis. Assim o esquema imagético adquire uma qualidade genérica que permite a apresentação da multiplicidade e do geral através do

específico. Esta faculdade genérica é mesmo aumentada nos casos em que os portadores concretos são termos simbólicos. Fórmulas em matemática podem fazer o papel de portador de um esquema imagético adequado. Assim este é constituído por relações espaciais de símbolos na fórmula e de operações e transformações admissíveis com a fórmula (Dörfler, 1991).

Na educação matemática Presmeg também deu contribuições importantes para a compreensão dos processos imagéticos. Presmeg (1992), relativamente a imagética visual, inclui não só aquela imagética que alcança a vivacidade e a transparência de uma figura como também outros tipos de imagética que ilustram formas, configurações e padrões. A sua definição de imagem visual *esquema mental que ilustra informação visual ou espacial*, não especifica se é exigida a presença mental de um objecto. A imagética é então definida como uma colecção de imagens. O poder da imagética é que ela pode resultar em visualização que ajuda os estudantes a criar ligações que facilitam o construir de significado na aprendizagem de geometria (Solano e Presmeg, 1995). Presmeg identificou cinco tipos de imagética visual em raciocínio matemático em alunos da escola secundária: imagética concreta, de memória, cinestésica, dinâmica e padrão. A *imagética concreta* pode ser pensada como “figura na mente”; a *imagética de memória* relaciona-se com a memória de fórmulas ou imagens reproduzidas ao recriar experiências; a *imagética dinâmica* envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta; *imagética cinestésica* envolve actividade muscular de algum tipo; *imagética padrão* é um tipo de imagética em que pormenores concretos são desprezados e existem apenas puras relações ilustradas num esquema visual-espacial (Brown e Presmeg, 1993).

Presmeg (1992) notou que a imagética pode ser usada de duas maneiras para representar situações abstractas. Primeiro, fazendo duma imagem visual concreta o portador de informação abstracta, por exemplo, as imagens de memória de fórmulas (prototípicas e metonímicas). Imagens prototípicas de triângulos revelaram-se úteis para obter razões trigonométricas especiais e imagens de diagramas estandarde beneficiaram a compreensão de teoremas em geometria euclidiana. Segundo, a abstracção pode ser representada, usando imagética padrão, que encorpora sem detalhe a essência da estrutura.

Outros contribuições para o desvendar da natureza e do papel da imagética no ensino e na aprendizagem da matemática tem sido dada por exemplo, por Owens, Jones, Gusev e Safuanov, Hegarty e Kozhevnikov. Owens (1999) considera a noção de visualização sinónima da noção de imagética e, para tarefas ligadas aos primeiros desenvolvimentos matemáticos e espaciais das crianças, ele identificou como visualizações: imagética pictórica concreta, imagética associada com padrões, imagética dinâmica associada com movimento dentro da

estrutura imagem, imagética acção envolvendo movimento de partes do corpo e imagética que envolveu o seguimento de um sucessão de procedimentos. Esta perspectiva de Owens parece fortemente influenciada pelos cinco tipos de imagética visual identificados por Presmeg.

Jones (1998) considera a imagética valiosa em termos de potencial para melhorar o ensino e aprendizagem da matemática, por exemplo, a imagética pode apoiar o desenvolvimento conceptual. Ele usou a seguinte classificação para as imagens mentais: *imagem passiva* (pode estar apenas associada com um conceito), *imagem organizacional* (permite que informação seja representada compactamente), *imagem geradora* (usada pelo aprendiz para guiar a sua aprendizagem e pode ser conceptualmente ou formalmente geradora). Imagens de objectos arrastados num software de geometria dinâmica podem por um lado melhorar o desenvolvimento conceptual e podem, por outro, serem geradoras conceptualmente.

Gusev e Safuanov (2003) apontam que o pensar em imagens deveria ser considerado um processo complexo de transformação de informação sensorial e consideram-no fulcral na aprendizagem da matemática da escola secundária fundamentalmente na aprendizagem da geometria. Explicitam então o papel do pensamento em imagens no criar de competências para resolver problemas geométricos, por exemplo “imaginar uma figura antes da execução do desenho”. Distinguem ainda quatro estádios, no processo de desenvolvimento do pensamento em imagens - mudança sequencial de formas de actividade mental: 1) criação de uma imagem primária (na base de algum material visual); 2) criação de uma imagem secundária baseada na memória; 3) operar com imagens; 4) formação criativa de novas imagens. Todos os quatro estádios acima enumerados são passos necessários para o processo de desenvolvimento do pensamento em imagens e cada estádio está relacionado com certas competências e métodos.

A pesquisa em ciência cognitiva e em neurociência sugere que a imagética visual não é geral e indiferenciada, mas sim composta de diferentes componentes visuais e espaciais relativamente independentes. Imagética visual refere-se a uma representação da aparência visual de um objecto tal como a forma a cor ou brilho. Imagética espacial refere-se a uma representação das relações espaciais entre partes de um objecto e a localização dos objectos no espaço ou os seus movimentos; mais, imagética espacial não está limitada à modalidade visual (alguém podia ter uma imagem espacial auditiva ou haptica). A dissociação entre aqueles aspectos de imagética tem então sido evidenciada por estudos cognitivos desenvolvidos por Hegarty e Kozhevnikov (1999). Estes autores fizeram ainda a distinção entre dois tipos de representações visual-espaciais usadas para resolver problemas matemáticos: *representações esquemáticas* (que fundamentalmente codificam relações

espaciais descritas num problema) e *representações pictóricas* (que fundamentalmente codificam a aparência visual de objectos ou de pessoas descritas). O uso de representações esquemáticas está segundo eles, positivamente relacionado com o sucesso em resolver problemas de matemática, enquanto o uso de representações pictóricas está negativamente relacionado com o sucesso em resolver problemas de matemática.

Para o desenvolvimento do modelo teórico de pensamento visual-espacial proposto usei os diferentes tipos de imagética identificados por Presmeg: imagética concreta, imagética de memória, imagética cinestésica, imagética dinâmica e imagética padrão (Brown e Presmeg, 1993). A imagética vai então incluir imagens concretas (“figuras na mente”), imagens de memória, estas últimas fornecendo um meio rápido de relembrar princípios abstractos gerais e procedimentos de uma forma concreta. Presmeg (1992) encontrou dentro das imagens de memória, imagens de memória por fórmulas, em alunos da escola secundária, que foram úteis para obterem razões trigonométricas especiais e imagens de diagramas estandarde para teoremas para geometria euclidiana. Relativamente às imagens cinestésicas identificadas por Presmeg, a actividade muscular daquelas imagens pode ser limitada ao uso das mãos e dos dedos. Uma criança pode mostrar usar uma imagem cinestésica, por exemplo, quando movimenta a mão para indicar uma rotação. Uma criança usa uma imagem dinâmica quando por exemplo, conta mentalmente enquanto pensa usar os dedos (tem uma figura na mente e move-a). A imagética padrão identificada por Presmeg, abarca uma imagem esquemática que sustenta regularidades. Ainda Presmeg (1992, pp. 605-606) realça que “as imagens padrão são construídas individualmente de acordo com uma multiplicidade de imagens concretas” e parece que esta construção se relaciona com a criatividade que está implícita ao fazer conexões entre diferentes domínios de experiência e também implícita nas construções metafóricas e metonímicas.

2.4.2. *Capacidades espaciais*

Historicamente, as capacidades espaciais têm sido assunto de interesse desde Galton, 1883, quando este começou uma investigação psicológica sistemática. Uma linha de pesquisa nesta área foi feita usando análises factoriais. Os analistas de factor, como o nome sugere, estavam principalmente preocupados em analisar factores intelectuais e suas relações. Faziam parte duma tradição psicométrica baseada na avaliação objectiva e quantificação de capacidades intelectuais. Não faziam qualquer referência aos indivíduos, raramente acompanhavam de perto como um indivíduo abordava uma solução a um problema particular e as suas análises raramente estavam relacionadas com a sala de aula (Bishop, 1980).

Spearman em 1927 e Thurstone em 1938 tentaram clarificar a estrutura da inteligência humana. Os seus métodos, envolviam testar grupos em grande escala e os seus “constructos” eram “capacidade” e “factor”. A capacidade espacial e a capacidade numérica eram geralmente testadas em todos os grandes estudos de análise factorial, mas a capacidade matemática como tal, não era. Para Spearman, era que a solução de qualquer tarefa exigia a aplicação de um factor geral (inteligência geral) e de um factor específico. A capacidade matemática parecia ser concebida como uma combinação de inteligência geral aplicada ao contexto matemático, e de certas capacidades específicas tais como capacidade numérica. Thurstone, por outro lado, não apoiava a noção de factor geral, mas antes propunha um conjunto de capacidades mentais básicas, que são em certas combinações em qualquer área específica como na execução matemática (Bishop, 1980).

Posteriormente foram desenvolvidas análises relativas a capacidades espaciais e começa a prevalecer a noção da existência de diferentes capacidades espaciais (no plural), como oposto à ideia de capacidade espacial (no singular). Uma capacidade tem o sabor de uma diferença individual, possivelmente herdada. Capacidades são descritas em termos mais ensináveis, possivelmente susceptíveis de serem desenvolvidas dentro de cada criança (Bishop, 1980).

Vamos agora ilustrar algumas definições de capacidades espaciais para nos darmos conta que essas mesmas definições parecem estar ainda pouco esclarecidas e umas vezes elas aproximam-se da definição de imagética (Lohman, Cook, Clements e Young) e outras vezes distanciam-se. Lohman (citado em Clements, 1981) definiu capacidade espacial, como a capacidade de gerar, reter e manipular imagens espaciais abstractas. Cook (citado em Clements, 1981) diz que imagética é um tipo de capacidade espacial e descreve a imagética mental como a formação e retenção de uma imagem que não envolve nenhum movimento da imagem, uma vez ela formada. Clements (1981) diz que não há uma definição amplamente aceite do termo capacidade espacial, definições de factores espaciais tais como orientação espacial e visualização espacial quase invariavelmente fazem uso da noção de imagética. Young (1982) diz que capacidades espaciais envolvem muitos modos de interpretar o nosso ambiente, tais como, interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimento ou trocas naquelas imagens.

Outras perspectivas diferentes sobre capacidades espaciais são nos dadas por Lea e Meissner e Pinkernell. Lea (1990) aponta que capacidade espacial é um conjunto complexo de competências que se entrosam. Inclui aspectos de distância, direcção, percepção, movimento e relação da parte com o todo e de objectos entre si. Meissner e Pinkernell (2000, p. 292) referem que capacidades espaciais é um termo para uma larga gama de diferentes aspectos.

No centro, vemos operações mentais visuo-espaciais as quais podem ser descritas como se fossem operações no espaço real. E há muitas tarefas para testar as capacidades espaciais que podem ser resolvidas pelo uso de operações mentais visuo-espaciais. Mas se tal tarefa é resolvida correctamente, não é necessário que seja feita pelo uso de operações visuo-espaciais mentais. Isto significa que a solução correcta de tal tarefa não dá necessariamente informações sobre a habilidade de usar operações mentais visuo-espaciais. De facto, parece que estratégias de resolução mais avançadas podem reduzir o uso de operações mentais visuo-espaciais. Ainda Meissner e Pinkernell apontam que há capacidades espaciais que se podem desenvolver como proceitos e neste caso os processos mentais ao resolver uma tarefa dependem do estágio de desenvolvimento da pessoa naquele proceito. Gray e Tall (1994) propuseram o constructo *proceito elementar* como uma amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático, e um *símbolo* que é usado tanto para representar o processo como o objecto.

Meissner e Pinkernell (2000) dizem-nos que no contexto de avaliar a execução das capacidades espaciais, onde nós confiamos no comportamento observável, como não temos acesso directo aos processos cognitivos, as capacidades comunicativas tornam-se parte das capacidades a serem avaliadas, especialmente quando, como no contexto das capacidades espaciais, as figuras são tacitamente esperadas serem a parte mais fácil da execução de uma tarefa. Assim segundo Meissner e Pinkernell (2000) as capacidades espaciais são baseadas no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, mas a medição das capacidades espaciais também depende do formato da comunicação. Respostas incorrectas podem não ser o resultado da não existência de capacidades espaciais. McLeay, O'Driscoll-Tole e Jones (1998) apontam que competências verbais emergem como um atributo importante no sucesso de tarefas geométrica. Tornou-se notório que muitas vezes a falha em compreender o vocabulário da matemática forneceu uma barreira no acabamento de uma tarefa.

Bishop e Tartre falam de capacidades espaciais em educação matemática. Bishop (1983) sustenta que é claro, pelo menos para um educador matemático, que pode não haver uma definição verdadeira de capacidade espacial, mas que devemos procurar definições e descrições de capacidades e processos que nos ajudem a resolver os nossos próprios problemas particulares. Bishop lembra que uma formação espacial que tem tido algum sucesso, é aquela feita no tempo certo (em geral quanto mais nova é a criança maior é a possibilidade de melhoramento), quando são tomados em consideração os contextos culturais, se experimentam materiais manipulativos bem estruturados e quando a formação espacial é acompanhada por atenção tanto a uma linguagem adequada como às diferenças individuais em visualização. Tartre (1990) considera as capacidades espaciais como capacidades ligadas à

compreensão, manipulação, reorganização ou interpretação de relações visuais e apoia a ideia de que a capacidade espacial pode ser um indicador mais geral de uma forma particular de organizar o pensamento, na qual a nova informação vai ser ligada a estruturas do conhecimento anterior para ajudar a dar sentido ao novo material.

Parece claro que da diversidade de definições de capacidade espacial ou capacidades espaciais vai surgir uma variedade de categorizações de capacidades espaciais ou de identificações de capacidades como espaciais, como a seguir vai ser descrito. Guay e McDaniel (1977) classificaram as capacidades espaciais em de baixo nível e de alto nível. As capacidades de *baixo nível* foram definidas como exigindo a visualização de configurações de duas dimensões, mas nenhuma transformação mental dessas imagens visuais; capacidades de alto nível foram caracterizadas como exigindo a visualização de configurações tridimensionais e a manipulação mental dessas imagens visuais.

McGee (citado em Tartre, 1990) distingue dois grandes tipos de capacidades espaciais: visualização e orientação. A *visualização espacial*, envolve a “capacidade de mentalmente manipular, rodar, torcer ou inverter um objecto estímulo apresentado pictoricamente” (p. 217). A *orientação espacial*, envolve “a compreensão do arranjo dos elementos dentro de um padrão visual e a aptidão para permanecer não confuso por mudanças de orientações na qual a configuração pode ser apresentada” (p. 217). McGee distingue então as tarefas de visualização das de orientação espacial, pela identificação do que vai ser movido. Nas de orientação espacial só a perspectiva das pessoa que vê o objecto é que muda ou se move, não se exige mover mentalmente o objecto. Também a manipulação mental é a principal tarefa em visualização espacial.

Bishop (1983) sugeriu duas componentes espaciais que acreditava serem especialmente relevantes para a aprendizagem da matemática: a capacidade de interpretar informação figural e a capacidade de processamento visual. A *capacidade de interpretar informação figural* envolve “compreender as representações visuais e o vocabulário usado em trabalho geométrico, gráficos, tabelas, e diagramas de todos os tipos. Matemática é rica em tais formas e interpretar informação figural trata a leitura, compreensão e interpretação de tal informação. É uma capacidade de conteúdo e contexto e relaciona-se particularmente com a forma do material estímulo” (p. 184). A *capacidade de processamento visual* envolve “a visualização e a tradução de relações abstractas e de informação não figural em termos visuais. Inclui a manipulação e transformação de representação visual e imagética visual. É uma capacidade de processo, e não se relaciona com a forma do material estímulo” (p. 184). Bishop aponta ainda que esta dicotomia claramente se relaciona com a dicotomia Orientação - Visualização de McGee, mas é mais vasta e refinada: a descrição de interpretar informação figural alarga a

Orientação de McGee por incluir convenções geométricas e gráficas e por dar ênfase à interpretação exigida por aquelas representações; a capacidade de processamento visual tem muito em comum com Visualização, mas alarga e aviva ao dar ênfase ao processo em vez da forma do estímulo.

Pallascio, Talbot, Allaire, e Mongeau (1989) definiram uma tipologia das capacidades espaciais num espaço geométrico, tendo como base um quadro de tripla entrada. Na primeira entrada definiram cinco capacidades hierarquizadas: transposição, estruturação, determinação, classificação e geração. A *transposição* é capacidade de estabelecer as correspondências, as equivalências, e efectuar a passagem entre os diferentes modos de representação (físico, linguístico, algébrico e geométrico) e níveis geométricos; a *estruturação* é capacidade de identificar as propriedades e a combinatória geométrica numa estrutura espacial; a *determinação* é a capacidade de delimitar os elementos ou os parâmetros definidos por restrições geométricas sobre uma estrutura espacial; a *classificação* é a capacidade de agrupar as estruturas espaciais segundo uma escolha de propriedades ou parâmetros geométricos comuns; a *geração* é a capacidade de produzir ou modificar uma estrutura espacial de forma a que esta estrutura responda a certos critérios geométricos pré-determinados.

A segunda entrada foi definida sobre quatro níveis geométricos: topológico, projectivo, afim e métrico. O *nível topológico* corresponde principalmente ao estudo das propriedades de adjacência e de conexidade das estruturas espaciais, propriedades que são conservadas após uma ou mais deformações contínuas, tais como alongamento, encurtamento, dobragem ou torsão; o *nível projectivo* corresponde fundamentalmente ao estudo das propriedades de incidência e de planificação que são conservadas após uma projecção central; o *nível afim* corresponde principalmente ao estudo das propriedades de paralelismo e de convexidade que são conservadas após uma projecção paralela; o *nível métrico* corresponde principalmente ao estudo das propriedades de distância e angulação.

Na última entrada Pallascio, Talbot, Allaire, e Mongeau distinguem dois planos: perceptivo e representativo. O *plano perceptivo* é constituído de uma acção mental de reconhecimento das formas e o *plano representativo* constituído de uma acção concreta de transformação de formas.

Del Grande (1990) sumariou as seguintes sete capacidades espaciais: coordenação visual motora, percepção da figura fundo, constância perceptual, percepção da posição no espaço, percepção das relações espaciais, discriminação visual, e memória visual como sendo relevantes para o estudo da matemática na escola elementar e da geometria em particular. A *coordenação visual motora* é capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. A *percepção da figura fundo* é o acto visual de identificar uma componente específica numa

determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos mais ou menos complexos. A *constância perceptual* envolve o reconhecimento de certas figuras geométricas apresentadas numa variedade de tamanhos, formas texturas e posições no espaço e discriminação de figuras geométricas similares. A *percepção da posição do espaço* é a capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes. A *percepção das relações espaciais* é a capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação com a pessoa. A *discriminação visual* é capacidade de identificar as semelhanças ou as diferenças entre objectos. A *memória visual* é a capacidade de relembrar objectos não visíveis e relacionar as suas características com as de outros objectos visíveis ou não.

As classificações de capacidades espaciais ou de estratégias espaciais a seguir exibidas por Latner e Hadar, Gorgorió e Owens parecem ser fortemente influenciadas por perspectivas de processos imagéticos já aqui identificados. Assim, Latner e Hadar (1999) falam das componentes das capacidades espaciais em termos de imagética e a sua classificação de capacidades espaciais parece estar fortemente influenciada pela posição de Wheatley (1998) sobre imagética: “as imagens são construídas, re-apresentadas, transformadas e mantidas” (p. 69). Latner e Hadar (1999) identificam como componentes fundamentais das capacidades espaciais para um ambiente onde se executam tarefas em geometria tridimensional: capacidade de criar uma imagem mental de um sólido no espaço tridimensional, capacidade de reter essa imagem mental, capacidade de manipular uma imagem mental, capacidade de “ver” as relações entre as várias partes de um sólido.

Gorgorió (1996) parece ter sofrido a influência de Bishop ao considerar relevante o desenvolvimento da capacidade de processamento visual para a aprendizagem em matemática. Ele construiu tarefas espaciais que pretendiam desenvolver a capacidade de processamento visual, capacidade que segundo ele era necessária para executar as seguintes operações mentais: a capacidade de imaginar objectos espaciais, relações e transformações; capacidade de codificar em termos verbais ou mixtos; capacidade de não só imaginar as imagens visuais de factos espaciais, mas também a capacidade de resolver as tarefas usando processos que não são meramente visuais. Como resultado identificou em alunos dos 12 aos 16 anos e para tarefas de rotação, três tipos de estratégias cognitivas: estratégia de estruturação, a estratégia de processamento e a estratégia de aproximação. Para estudar as *estratégias de estruturação*, foi considerada a estratégia cognitiva dos estudantes do ponto de vista das formas diferentes de tratar do problema, da organização mental e da fonte de informação usada para a tarefa. Para analisar as *estratégias de processamento*, foi considerada a estratégia cognitiva dos estudantes do ponto de vista da forma de representação mental:

visual ou verbal. Para determinar as *estratégias de aproximação* foram analisadas as estratégias cognitivas dos estudantes tendo em atenção o objecto geométrico, sendo caracterizado como sendo global ou parcial. Gorgorió pôde então identificar no contexto de resolver problemas de transformação que envolvam rotações espaciais, possíveis características ou diferentes aspectos espaciais, que provavelmente será necessário cultivar, para o melhoramento do raciocínio espacial.

Também Owens (1999) definiu estratégias imagéticas e parecem estas estar fortemente influenciadas pela classificação de imagens mentais identificada por Norma Presmeg (Brown e Presmeg, 1993). Owens construiu uma estrutura de ensino para a primeira abordagem da matemática espacial, onde *orientação e movimento, reconhecimento parte-todo e classificação, e linguagem* são aspectos do pensamento espacial que envolve a dita estrutura de aprendizagem. Owens preocupou-se com o papel e a diversidade da imagética visual na resolução de tarefas espaciais e construiu os seguintes cinco grupos de estratégias de imagética, para a matemática espacial de crianças, com maior ou menor probabilidade de aparecerem e serem usadas pelas crianças pela seguinte ordem: estratégias emergentes, estratégias perceptuais, estratégias imagéticas pictóricas, estratégias imagéticas padrão e dinâmicas e estratégias eficientes. *Estratégias emergentes* surgem quando os estudantes estão a começar a prestar atenção a aspectos das experiências espaciais, a manipular e explorar formas e espaço, a seleccionar formas como as mostradas ou nomeadas, e associar palavras com formas e posições. *Estratégias perceptuais* ocorrem quando os estudantes estão a prestar a atenção a características perceptuais e começam a fazer comparações, confiando no que eles podem ver ou fazer. *Estratégias imagéticas pictóricas* aparecem quando os estudantes desenvolvem imagens mentais associadas com conceitos, com uso cada vez maior da linguagem estandarde. *Estratégias imagéticas dinâmicas e padrão* surgem quando os estudantes usam padrões e movimento na sua imagética mental e desenvolvem relações conceptuais. *Estratégias eficientes* ocorrem quando os estudantes começam a resolver com sucesso problemas espaciais e construções usando a imagética, classificação, reconhecimento da parte com o todo. Owens aponta ainda que a estrutura de aprendizagem por ela construída, ilustra que as estratégias de visualização são uma chave para o desenvolvimento do pensamento espacial (conhecimento e capacidades).

Parece que independentemente de se pensar nas possíveis capacidades espaciais e respectivas definições em termos de imagética ou não, as componentes espaciais e a imagética terão forçosamente de estar relacionadas entre si no processo de aprendizagem, aquando da execução de tarefas específicas. Então os estudantes necessitam de usar palavras para representarem a sua imagética e de identificar características espaciais no seu ambiente e de

ter em conta: o sistema perceptual humano comum, elementos universais de ambientes humanos e experiências de todos os dias. Ainda os contextos onde a aprendizagem vai ter lugar é fulcral e condicionante dos variados aspectos que as capacidades espaciais possam apresentar, dos processos de aprendizagem ou das estratégias cognitivas que os alunos possam seguir.

Para o desenvolvimento do modelo teórico proposto para a compreensão do pensamento visual-espacial identifiquei como pertinentes as seguintes capacidades espaciais: estruturação, coordenação e construção visual. Estas capacidades são o resultado de reflexão sobre o meu trabalho profissional com professores desde o pré-escolar ao 4º ano do ensino básico em formação contínua, mas fundamentalmente são o produto de influências: de Bishop pela estratégia apontada na procura das capacidades espaciais “procurar definições e descrições de capacidades e processos que ajudem a resolver problemas particulares” (Bishop, 1983, p. 181); de Pallacio, Talbot e Mongeau (1989) pela sua tipologia de capacidades espaciais; de Del Grande (1990) pela sua classificação de capacidades espaciais identificadas em crianças da escola elementar.

As capacidades espaciais estruturação, coordenação e construção visual têm um carácter abrangente e podem chamar outras capacidades elementares. A *estruturação espacial* é a capacidade de identificar as propriedades e a combinatória geométrica duma estrutura espacial. Esta estrutura espacial pode ser uma combinação de um ou mais objectos geométricos. A capacidade de estruturação pode envolver outras capacidades tais como: percepção da posição no espaço, percepção das relações espaciais, memória visual, constância perceptual, percepção da figura fundo, discriminação visual.

A capacidade de *coordenação* apresenta várias facetas. Uma delas é a capacidade de adoptar ou usar estruturas de referência como meio de organizar o pensamento. Por exemplo, o uso de estruturas de referência em relação às posições espaciais que possam a vir a ser definidas e relativamente aos objectos abstractos que estão a ser considerados: estruturas centradas no observador, estruturas centradas no objecto (os objectos estão centrados relativamente aos seus eixos intrínsecos), estruturas centradas no ambiente (relativas às características proeminentes do ambiente). Battista identificou uma outra faceta da capacidade de coordenação “arranjar (ordenar) objectos abstractos em posições convenientes uns em relação aos outros e em relação aos todos aos quais eles pertencem” (Battista, 2003, p. 79). A capacidade de coordenação pode ainda chamar capacidades como: memória visual, percepção das relações espaciais, antecipação (capacidade que sustenta a representação mental de situações dinâmicas).

A capacidade de *construção visual* parece envolver algumas facetas e é a capacidade de produzir ou modificar uma estrutura visual-espacial de forma que esta estrutura responda a certos critérios geométricos pré-determinados. Esta capacidade pode envolver simultaneamente a aplicação de esquemas geométricos, espaciais, de programação e de acção e relacioná-los de forma a obter um produto. Esquemas de acção são entendidos no sentido de Dutke e Reimer (2000), isto é, estruturas de conhecimento, responsáveis pelo uso eficiente de software. São então representações de memória de longo-termo de acções executadas repetidamente. A capacidade de construção visual pode incluir capacidades tais como: percepção da figura fundo, memória visual, antecipação, organização lógica (capacidade de conduzir actividades envolvendo várias fases), selecção (mobilizar as propriedades relevantes, isoladas ou combinadas, de forma a reconhecer quais as propriedades necessárias para obter o produto desejado), experimentação crítica (ensaio, análise do produto, emenda).

A par das capacidades espaciais estruturação, coordenação e construção visual, quero ainda dar ênfase para o desenvolvimento do modelo à capacidade de verbalização uma forma de descrever a dinâmica mental, já que problemas visuo-espaciais podem envolver aspectos linguísticos na sua descrição. O papel da linguagem é variado, pode ajudar a interpretar percepções e acções, apoiar a construção de novas relações, ajudar a pensar, a construir e a controlar o pensamento ao resolver problemas. Por *verbalização* entendo a capacidade linguística que envolve descrições verbais das transformações mentais, de relações espaciais usando termos matemáticos (manipulação simbólica ou não).

2.5. Matemática corpórea e os mecanismos conceptuais metáforas e gestos

A actividade da nossa mente depende dum conjunto integrado e dinâmico que actua como um todo, cujas componentes podem ser caracterizados como o cérebro, o corpo e o mundo sócio-cultural. O pensamento é também uma questão de cultura em sentido lato, pois envolve expectativas, motivações, tarefas e conhecimentos prévios.

O cérebro humano e o corpo constituem um organismo indissociável, formando um conjunto integrado por meio de circuitos reguladores bioquímicos, neurológicos mutuamente interactivos (incluindo componentes endócrinas, imunológicas e neurais autónomas). O organismo interage com o ambiente como um todo: a interacção não é nem exclusivamente do corpo nem do cérebro. As operações fisiológicas que denominamos de mente derivam desse conjunto estrutural e funcional e não apenas do cérebro, e os fenómenos mentais só podem ser cabalmente compreendidos no contexto de um organismo em interacção com o ambiente que o rodeia. Porém, os organismos complexos como os nossos fazem mais do que gerar respostas

externas, espontâneas ou reactivas, que no seu conjunto são conhecidas como comportamento. Eles geram também respostas internas, algumas das quais constituem imagens (visuais, auditivas, somatossensoriais) básicas para a mente (Damásio, 1994).

Os seguintes grandes pressupostos da ciência cognitiva: a mente é inerentemente corporizada, o pensamento é a maior parte das vezes inconsciente, conceitos abstractos são largamente metafóricos, obrigam-nos a pensar a mente como inerentemente corporizada, o raciocínio como modelado pelo corpo, e uma vez que a maior parte do pensamento é inconsciente, a mente não pode ser conhecida por simples auto-reflexão (Lakoff e Johnson, 1999). O raciocínio surge do corpo, não transcende o corpo, contrariamente ao que é mantido pelo cognitivismo, onde o raciocínio (incluindo o matemático) é não-corpóreo, intemporal e universal. Quaisquer aspectos universais da razão, surgem das coisas comuns dos nossos corpos e cérebros e dos ambientes onde vivemos (Lakoff e Johnson, 1999).

Abstracções matemáticas crescem em larga medida a partir das actividades corporais tendo o potencial de se referirem a coisas e a acontecimentos bem como serem auto-referenciais. Por exemplo, pensemos na medição. As unidades primitivas de medida são partes do corpo: pé, braço, polegar, etc. e são imaginariamente repetidas e postas umas a seguir às outras. Todo o processo é uma actividade corporal de cobrir uma extensão com apresentações sucessivas de unidades deixando traços materiais ou imaginários ao longo do caminho que vão ser contados (Nemirovsky, 2003).

A natureza da matemática perspectivada pelo que denomino de teoria da *matemática corpórea* baseia-se nos achados da ciência cognitiva recente e em particular no trabalho de Lakoff e Nunez (1997), Johnson (1987), Nunez (2000) e Nunez (em impressão). A teoria da *matemática corpórea* sustenta no essencial que um grande número de ideias matemáticas tanto as mais básicas como as mais sofisticadas é metafórico por natureza; noções abstractas são conceptualizadas em termos concretos através de estruturas inferenciais precisas e maneiras de raciocinar baseadas no sistema sensório-motor (Lakoff e Nunez, 2000).

Na perspectiva da matemática como uma forma de cognição humana cujas raízes assentam na experiência humana comum (biológica e social), tanto os objectos como os processos matemáticos podem ser analisados em termos de estruturas conceptuais básicas tais como esquemas imagéticos e metáforas conceptuais. Uma metáfora conceptual é um mecanismo cognitivo fundamental (tecnicamente ela é uma correspondência entre domínios que preserva a inferência), na qual a estrutura lógica e inferencial de um domínio “fonte” é projectada num domínio “alvo” permitindo o uso de inferências específicas baseadas no corpo para estruturar a inferência abstracta (Nunez, 2000, p. 9). Por exemplo a compreensão corpórea de como os objectos podem conter outros constitui a base, da noção matemática de

inclusão de conjuntos (Edwards, Frant e Campbell, 2003). O movimento corpóreo humano, a manipulação de objectos e interações perceptuais envolvem padrões que se repetem sem os quais a nossa experiência seria caótica e incompreensível. Estes padrões são chamados esquemas imagéticos (já referidos neste capítulo) que funcionam fundamentalmente como estruturas abstractas de imagens. Esquemas imagéticos são estruturas básicas dinâmicas de orientação que caracterizam inferências espaciais e ligam a linguagem à experiência visual-motora. Por exemplo, um esquema imagético frequente de grande importância para a matemática é o *esquema contentor*, o qual na cognição do dia a dia ocorre como parte central do significado das palavras *dentro* e *fora*. Conjuntos em matemática têm sido conceptualizados como esquema *contentor* e os elementos dos conjuntos como objectos *dentro* do esquema *contentor*. Outros esquemas imagéticos tais como: *fonte-caminho-meta* (onde estão subjacentes conceitos como para e de), *contacto* e o esquema *verticalidade* existem e, sobre combinações destes esquemas, são construídos muitos conceitos básicos. Embora um dado esquema imagético possa primeiro emergir como uma estrutura de interações corpóreas, pode ser metaforicamente desenvolvido e alargado à volta da qual o significado é organizado em níveis mais abstractos de cognição (Johnson, 1987).

Um outro mecanismo conceptual proposto na teoria da matemática corpórea é *mistura conceptual* (conceptual blend) que consiste numa aplicação extraída de mais de um domínio fonte para permitir a construção de um domínio alvo que não é isomórfico a nenhuma das fontes mas que aproveita partes da estrutura inferencial de cada uma. Um exemplo de mistura conceptual é “números como pontos numa linha”, em que partindo de compreensões previamente construídas de números e de linhas se criam novas entidades “números-pontos” que têm características de ambos (Edwards, 2003).

Os esquemas imagéticos podem ser estudados empiricamente através da linguagem (e dos gestos espontâneos) em particular através da manifestação linguística de relações espaciais (Nunez, 2000). Actividades linguísticas têm uma natureza corpórea genuína (como aponta a pesquisa neurológica) e apoiam os estudantes no desenvolvimento do discurso científico, cujos traços concretos são misturas, metáforas e gestos (Robutti e Arzarello, 2003). Os conceitos matemáticos são construídos na base de representações analógicas fundamentadas na nossa interação no espaço e no tempo (Bazzini, 2001).

Fenómenos cognitivos tais como sistemas conceptuais, abstracção, mecanismos de inferência podem manifestar-se naturalmente através de actividades corporais ou mentais muitas vezes inconscientes tais como a produção espontânea de gestos síncronos com metáforas conceptuais e misturas conceptuais (Nunez, 2004). Estudos sobre gestos, usando uma investigação detalhada da produção linguística e cognitiva em tempo real, movimentos

corporais (principalmente de mãos e braços) e inflexão de voz mostram que as metáforas conceptuais envolvidas em ideias matemáticas têm de facto uma realidade psicológica (e presumivelmente neurológica) muito fortemente corpórea (Nunez, em impressão).

Vou agora apresentar elementos essenciais da literatura sobre metáforas e gestos, mecanismos conceptuais que parecem ser cruciais para a comunicação e activação do pensamento matemático e afiguram-se-me a lentes para a compreensão da cognição.

2.5.1. *Metáforas*

A palavra metáfora é derivada do grego *metaphora* que significa transferir ou transportar. Não tem sido encontrada uma definição verdadeiramente satisfatória da noção de metáfora, apesar de ter sido objecto de reflexão filosófica, linguística, estética e psicológica desde o princípio dos tempos. Se a projecção metafórica é a base para a criação de todos os nossos sistemas conceptuais, então ao tentar definir metáfora não podemos escapar a uma certa circularidade (Sfard, 1997). O paradoxo é que não podemos falar sobre metáfora excepto se usarmos uma estrutura conceptual que por si seja gerada fora da metáfora (Sfard, 1997, p. 341).

Também deve ser destacado o carácter social e cultural das metáforas conceptuais e as dificuldades e restrições com que o uso de metáforas se depara na aula. O carácter social das metáforas conceptuais justifica-se pelo facto de que é pela linguagem que as correspondências conceptuais aparecem ou são dissipadas. As metáforas são produto de comunicação entre pessoas e não um esforço solitário de um pensador isolado. Sendo ainda as metáforas um produto de associações específicas da cultura dentro da qual elas surgem, poder-se-ia dizer, que as projecções metafóricas são mecanismos através das quais uma dada cultura se perpetua e se reproduz num sistema sempre crescente de conceitos (Sfard, 1997).

As dificuldades que podem ser experimentadas na aula, quando raciocinamos com metáforas, surgem da ambiguidade inerente às metáforas. O fundamento que liga os dois domínios de uma metáfora matemática pode ser construído diferentemente por diferentes indivíduos. Tudo junto com a ambiguidade inerente ao simbolismo matemático, faz apontar a necessidade para a comunicação e negociação do significado matemático no discurso da aula onde estejam envolvidos todos os membros dessa cultura (Presmeg, 1997). Também a linguagem metafórica que as crianças usam na aula (por exemplo, ao usar a linguagem de contagem e agrupando objectos) pode indicar que o seu pensamento está enraizado numa representação pedagógica particular e ser pois restritivo. Se assim for, os futuros professores desses alunos podem ter dificuldade em comunicar com eles, se usarem uma metáfora

diferente para contar. Contudo os professores podem ajudar os alunos a desenvolver uma variedade de metáforas diferentes (Bills, 2003) ultrapassando assim o problema. Pluralismo metafórico parece ser uma necessidade absoluta. Uma combinação adequada de metáforas permite-nos trazer para primeira linha as vantagens de cada uma delas enquanto se controlam as respectivas desvantagens (Sfard, 1997).

Antes de tentar escrever notas referentes à abordagem da metáfora pela teoria da *metáfora conceptual*, introduzida em 1980 (Johnson, 1987; Lakoff e Johnson, 1980; Lakoff e Nunez, 1997) quero apresentar as afirmações que a seguir escrevo proferidas por Sfard (1997). Até há pouco tempo a metáfora tinha sido concebida como um instrumento linguístico e por tal era fundamentalmente um objecto de pesquisa linguística. As contribuições de Black em 1962 e Reddy nos últimos anos 70, foram marcos fulcrais para a pesquisa sobre metáfora, mas numa perspectiva construtivista. De acordo com a teoria de *interacção de metáfora*, de Black, a nossa consciência de semelhança entre o “alvo” e a “fonte” de uma metáfora não é um pré-requisito para a criação da metáfora mas antes o resultado de uma interacção entre as suas componentes. Isto foi o primeiro passo para a afirmação de que a metáfora cria significados em vez de meramente os registar numa forma especial. Reddy foi também na mesma direcção e usou o termo *metáfora da conduta de comunicação* (*conduit metaphor*) para destacar a insustentabilidade da visão das expressões linguísticas (metáforas incluídas) como meros *contentores* ou *veículos* de significados pré-existentes. Por exemplo o uso de “dá-me uma ideia” parece supor que a linguagem transfere pensamentos. As palavras são vistas como contentores de pensamento e a linguagem funciona como uma conduta para transferir pensamento entre pessoas. Reddy sugeriu um paradigma de fazedores de ferramentas (toolmakers) onde a comunicação humana é vista como um processo dialéctico de produção de significado e onde a compreensão é sucessivamente atingida no decorrer de uma interacção continuada entre interlocutores.

As metáforas podem estar implícitas em todas as áreas de compreensão humana mesmo no próprio raciocínio (Johnson, 1987; Lakoff e Johnson, 1980). A metáfora infiltra-se no dia a dia, não só em linguagem mas em pensamento e em acção. O nosso sistema conceptual normal, em termos do qual pensamos e actuamos, é fundamentalmente metafórico em natureza e normalmente não estamos conscientes disso. Metáforas *estruturais* permitem-nos usar um conceito altamente estruturado e claramente delineado para estruturar um outro conceito. Por exemplo, a metáfora conceptual *discussão é guerra* é uma metáfora *estrutural* que nos permite focar nos aspectos combativos da argumentação e esconder outros aspectos do conceito que são inconsistentes com aquela metáfora, os aspectos cooperativos da argumentação (Lakoff e Johnson, 1980).

Há outra espécie de conceito metafórico que não estrutura um conceito em termos de um outro, mas em vez disso organiza um sistema total de conceitos em relação a um outro. Chamam-se metáforas *orientacionais*, uma vez que a maior parte delas tem que ver com estruturas para orientações espaciais tais como: cima-baixo, dentro-fora, frente-trás, ligado-desligado, fundo-raso, central-periférico. A metáfora *feliz é para cima, triste é para baixo* é uma metáfora de espacialização cima-baixo, metáfora orientacional onde por exemplo *feliz é para cima* define um sistema coerente em vez de um número de casos isolados ao acaso. A maior parte dos nossos conceitos fundamentais está organizada em termos de uma ou mais metáforas de espacialização. As nossas experiências físicas e culturais fornecem muitas bases possíveis para metáforas de espacialização. Quais as escolhidas e quais as mais importantes pode variar de cultura para cultura (Lakoff e Johnson, 1980).

Compreender as nossas experiências em termos de objectos físicos (especialmente os nossos próprios corpos) e substâncias também nos permite pegar em partes da nossa experiência e tratá-las como entidades discretas ou substâncias de uma espécie uniforme, fornecendo-nos a base para uma larga variedade de metáforas *ontológicas*, isto é, maneiras de ver acontecimentos, actividades, emoções, ideias, etc. como entidades e substâncias. Consideremos, por exemplo, as seguintes descrições metafóricas: “ele foi-se abaixo”, “ele está fora de vista”, “ele caiu em depressão”. A primeira descrição faz uso da *metáfora máquina* onde existe uma concepção de mente que tem um estado ligado-desligado, um nível de eficiência, uma capacidade produtiva, um mecanismo interno, uma fonte de energia e uma condição de operar. A descrição metafórica “ele está fora de vista” envolve conceptualizar o nosso campo visual como um *contentor* e conceptualizar o que nós vemos como estando dentro dele. A metáfora é natural e emerge do facto que, quando olhamos para algum território (terra, chão, etc.) o nosso campo de visão define a fronteira do território, nomeadamente a parte que podemos ver. A terceira descrição metafórica faz também uso da metáfora *contentor* respeitante ao estado da pessoa (Lakoff e Johnson, 1980).

O sistema conceptual humano é então metaforicamente *estruturado*, isto é, a maior parte dos conceitos são parcialmente compreendidos em termos de outros conceitos que nós compreendemos em termos mais claros (orientações espaciais, objectos, etc.). As metáforas que estruturam o sistema conceptual habitual da nossa cultura, que está reflectido na linguagem do dia a dia, são designadas por convencionais (metáforas estruturais, metáforas orientacionais e metáforas ontológicas). Outras novas metáforas existem (serão exemplificadas posteriormente) que estão fora do sistema conceptual convencional, que são imaginativas e criativas e que podem dar-nos uma nova compreensão da nossa experiência na

mesma maneira que as metáforas convencionais fazem: fornecem estrutura coerente, evidenciam algumas coisas e escondem outras (Lakoff e Johnson, 1980).

Sfard (2002) realça que a escolha de uma metáfora é uma decisão altamente consequente. Metáforas diferentes podem conduzir a diferentes maneiras de pensar e a diferentes actividades. As metáforas estão longe de ser neutras relativamente às maneiras como raciocinamos, compreendemos, falamos e fazemos coisas. Devemos sempre estar alerta que a mais útil das nossas metáforas pode tornar-se um obstáculo, se ela é tomada literalmente em demasia ou se a não interpretamos criticamente.

A pesquisa contemporânea em teoria metafórica conceptual defende afirmações teóricas tais como as que vão ser seguidamente evidenciadas. Essas teses teóricas são baseadas em provas empíricas de uma variedade de fontes, incluindo experiências psicolinguísticas, generalizações sobre padrões inferenciais, extensões a casos novos, mudanças semânticas históricas e estudos sobre gestos espontâneos (Lakoff e Nunez, 1997). Há um extenso sistema convencional de metáforas convencionais em todo o sistema conceptual humano. As metáforas não são arbitrárias, são motivadas pela nossa experiência do dia a dia, especialmente a experiência corporal. As metáforas não são isoladas, mas ocorrem em sistemas complexos e combinam-se de forma complexa – metáfora não reside em palavras, é matéria de pensamento.

Para formar ideias matemáticas, há dois tipos fundamentais de metáforas conceptuais: metáforas fundamentadoras (*grounding metaphor*) e metáforas de ligação (*linking metaphors*) (Lakoff e Nunez, 1997). Metáforas *fundamentadoras*, que se ligam a experiências físicas, alicerçam a nossa compreensão das ideias matemáticas básicas em termos da experiência do dia a dia. Por exemplo, elas permitem-nos conceptualizar operações aritméticas em termos das acções de formar colecções, construir objectos ou de movimentar no espaço. Uma vez que as metáforas preservam muitas vezes a estrutura inferencial, tais metáforas permitem-nos projectar inferências sobre coleccionar, construir e mover no domínio abstracto da aritmética. Projectões metafóricas preservam a estrutura de esquemas imagéticos (esquemas cognitivos para coisas como contentor, caminhos, ligações, etc.). Na metáfora “*aritmética como colecção de objectos*” a nossa experiência corpórea comum de agrupar e coleccionar objectos serve como domínio “fonte” para construir a aritmética de números naturais (Edwards, 2003).

Metáforas *de ligação* são metáforas dentro da própria matemática que nos permitem conceptualizar um domínio matemático em termos de outro domínio matemático. Por exemplo, quando compreendemos metaforicamente *números como pontos de uma linha*, nós estamos a ligar aritmética e geometria, fazendo uso da metáfora *a aritmética é geometria*. Esta metáfora permite-nos projectar um campo da matemática num outro. É a metáfora

conceptual que nos diz exactamente como o nosso conhecimento de geometria vai ser projectado no da aritmética. A expressão metafórica “*zero é o conjunto vazio*” permite conceptualizar um ramo da matemática, a aritmética, em termos de outro ramo da matemática, a teoria de conjuntos. Aquela metáfora de ligação permite projectar verdades da teoria dos conjuntos na aritmética. As metáforas de ligação são centrais para a criação de novos conceitos matemáticos, mas também para a criação de novos ramos da matemática. Ramos clássicos da matemática tais como geometria analítica, trigonometria e análise complexa devem a sua existência a metáforas de ligação (Nunez, 2000). As matemáticas mais interessantes surgem do uso de metáforas de ligação (Lakoff e Nunez, 1997, Nunez, 2000).

Também existem metáforas que nem são metáforas fundamentadoras nem são metáforas de ligação, por exemplo elas são extensões educativas de metáforas fundamentadoras naturais, pertencem ao domínio do ensino, por construção artificial. Essas novas metáforas estão fora da própria matemática e fazem parte de métodos de educação matemática, imaginativos e muitas vezes forçados. Consideremos os números negativos. A extensão natural mais fácil de uma das metáforas fundamentadoras para os números negativos, é a metáfora do movimento. Se números são localizações atingidas por se moverem em passos uniformes num dado sentido (positivo) apartir de uma fonte e se zero é a origem, então números negativos são também localizações, mas localizações atingidas por se moverem em sentido oposto. Assim, se os números positivos estão à direita da origem, os números negativos estão localizados à esquerda da origem. A adição e a subtracção de números negativos podem também ser dadas por uma extensão relativamente fácil: quando se encontra um número negativo, inverte-se o sentido. Multiplicar por um número negativo é inverter o sentido e multiplicar por um número positivo.

As metáforas conceptuais, em particular as metáforas fundamentadoras, podem funcionar como ferramentas para pensar. Boero, Bazzini e Garuti (2001) distinguem aquelas metáforas, das metáforas de *comunicação* que se caracterizam por ter como único propósito comunicar sem qualquer conteúdo matemático. Por exemplo, na frase “A prova deste teorema é como um obstáculo numa competição, logo que se faz algum progresso imediatamente outra dificuldade aparece” a metáfora *obstáculo numa competição* é então *de comunicação* cujo propósito é fazer o ouvinte apreciar a dificuldade do problema. As metáforas de comunicação podem também ser empregues como substitutos de expressões técnicas, com as quais o interlocutor não está familiarizado. Um outro caso em que as metáforas executam uma função de “substituição” é quando o sujeito identifica um objecto matemático que ainda não está coberto por uma definição que o contenha. Estas metáforas de substituição cumprem o

objectivo de comunicar ao fornecer algumas ideias sobre o conteúdo matemático envolvido no discurso (Bazzini, 2001).

Boero, Bazzini e Garuti (2001) apontam que as metáforas de comunicação podem não resolver problemas profundos de aprendizagem e só exigem um envolvimento fraco por parte dos professores e ainda consideram que os professores deveriam legitimar e melhorar o uso de metáforas fundamentadoras (aquelas que fundamentam a nossa compreensão de ideias matemáticas em termos da experiência do dia a dia) como ferramentas para pensar. Estes investigadores sugerem também que seria interessante compreender melhor o papel específico das palavras e dos gestos na apropriação (activação) e no funcionamento das metáforas fundamentadoras. O papel das metáforas tem sido examinado empiricamente, por exemplo: no pensamento matemático de estudantes (Ferrara, 2003a; Stacey, Helme e Steinle, 2001) no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo de uma criança pequena (Droujkov, 2003) e em estudantes do secundário quando em tarefas de modelação abordavam alguns conceitos básicos de álgebra e cálculo (Ferrara, 2003b).

Vou agora referir-me a algumas metáforas ou estruturas metafóricas que directa ou indirectamente poderão vir a ser evidenciadas na vertente empírica do estudo. Usando a metáfora conceptual *linha numérica* podemos construir um conceito metafórico mais complexo, o *plano cartesiano*. O plano cartesiano é então uma mistura de aritmética e geometria na qual a aritmética é conceptualizada em termos de geometria através do conceito de linha numérica (Lakoff e Nunez, 1997).

Consideremos outra metáfora do nosso sistema conceptual de todos os dias, a metáfora do movimento fictício que pode ser resumida em “uma linha é o movimento de um viajante que traça essa linha”. O *movimento fictício* é um mecanismo cognitivo corpóreo fundamental através do qual nós inconscientemente (e sem esforço) concebemos entidades estáticas em termos dinâmicos, como quando dizemos *a estrada segue ao longo da costa*. A estrada por si não se move para lado nenhum, simplesmente está parada. Mas podemos concebê-la a mover-se “ao longo da costa” (Nunez, em impressão). Esta metáfora do movimento fictício aplica as nossas inferências comuns do dia a dia sobre movimentos, na matemática. Concebemos por exemplo, os aspectos estáticos e móveis de uma curva contínua por activação desta metáfora. Podemos então falar em matemática de uma função que se *move, cresce, oscila e atinge limites*. Formalmente falando a função não se move, mas cognitivamente falando, sob esta metáfora, ela o faz e isso é que importa em termos de compreensão (Nunez, Edwards e Matos, 1999). No plano cartesiano, os eixos dos *XX* e dos *YY* são linhas (rectas) e as funções contínuas são linhas também. Além disso é vulgar conceptualizar a continuidade de uma função como Euler o fez em termos de um movimento

sem saltos ao longo da linha que caracteriza a função, ao ser desenhada por uma mão (Lakoff e Nunez, 1997).

A actividade de programação da tartaruga Logo, pode ser tomada como uma metáfora, com sub-metáforas ricas. A metáfora da *tartaruga* relaciona a programação em Logo com domínios particulares da matemática. Logo pode servir como um veículo para o desenvolvimento e conexão de conceitos científicos e naturais em matemática. Isto é, as crianças, enquanto programam em Logo, podem manipular encarnações concretas de conceitos matemáticos abstractos. Trabalhos teóricos e empíricos sugerem que a metáfora da *programação da tartaruga* é capaz de produzir quatro metáforas interrelacionadas, flexíveis e ricas que afectam positivamente a aprendizagem dos estudantes: a programação da tartaruga como ambiente, a tartaruga como robot, a programação da tartaruga como brincadeira, a programação da tartaruga como ligação (Clements e Sarama, 1997).

Na *programação da tartaruga como ambiente geométrico* são críticas as componentes e as propriedades das figuras geométricas e as crianças nesse ambiente têm de melhorar as suas compreensões relativas a noções euclidianas de rotações, ângulos e segmentos de recta. A abstracção da forma e a correspondente representação de ideias geométricas é baseada na organização de acções executadas sobre objectos e não tanto da percepção, isso acarreta que a actividade baseada no Logo pode afectar positivamente a conceptualização de ideias geométricas (Clements e Sarama, 1997). Actividades em Logo têm o papel de trazer movimentos físicos inconscientes para um nível explícito de consciência (Clements e Battista, 1992).

A metáfora *tartaruga como robô* faz saber que a tartaruga do Logo executa os comandos e faz exactamente o que lhe foi ensinado fazer. Uma resposta às intuições, ideias e estratégias dos alunos é dada pela tartaruga a qual pode ser usada para reflectir sobre os respectivos pensamentos e dar ensejo a novas tomadas de decisões e a experimentação de novas ideias.

A metáfora *programação da tartaruga como brincadeira* existe porque criar, correr e mudar instruções à tartaruga são actividades motivantes para a maior parte dos alunos. O ambiente do Logo parece conducente não só a pôr problemas como também a jogar com ideias. Criar uma figura e o programa que a desenhou é também fonte de considerável orgulho (Clements e Sarama, 1997).

A *programação da tartaruga como ligação* pode ajudar os alunos a ligar diferentes representações e tipos de conhecimentos. Primeiro os alunos compõem comandos numa linguagem de programação simbólica para mandar a tartaruga movimentar-se como eles se movimentariam. Desta maneira a metáfora promove a conexão de representações formais com

representações visuais dinâmicas, apoiando a construção de estratégias e ideias matemáticas a partir de intuições e abordagens visuais. Os comandos que os estudantes usam são matemáticos em natureza, com um uso frequente de números, aritmética e variáveis. Isto promove a integração de ideias de aritmética ou de álgebra. Embora muita da matemática, tal como a aritmética seja procedural por natureza, a geometria é quase exclusivamente conceptual. Contudo a tartaruga desenha figuras geométricas seguindo sequências de procedimentos em programas. Desta maneira, a metáfora da programação ajuda a ligar tipos de conhecimento conceptual e procedural (Clements e Sarama, 1997).

Metáforas conceptuais, metáfora do movimento e as quatro metáforas interrelacionadas da programação da tartaruga atrás mencionadas foram identificadas aquando da exploração e validação do modelo de pensamento visual-espacial proposto e descrito no capítulo IV.

2.5.2. Gestos

Os gestos são centrais para a cognição humana e entre culturas eles constituem elemento penetrante da comunicação humana. Gestos podem ser olhados como instrumentos de mediação que ligam o social e o psicológico (Vygotsky, 1978). Há provas que o gesto está profundamente integrado com capacidades cognitivas. Esta integração começa cedo e desenvolve-se durante a infância. A presença de artefactos visuais e a disponibilidade de gestos capacitam os estudantes a comunicar mesmo antes da sua iniciação ao discurso apropriado do domínio com que estão a lidar. Fontes como gestos e representações visuais capacitam o estudante a comunicar duma forma que o colega compreende (Roth, 2001). Quando os estudantes conversam na presença de objectos materiais estes fornecem uma base fenomenológica relativamente à qual os estudantes podem executar gestos metafóricos que dão corpo a entidades conceptuais e abstractas (Roth, 2001). Há então alguma prova que os gestos ajudam os estudantes a coordenar as suas interacções, mas não tem sido mostrado como os gestos, a coordenação e a interacção estão relacionados com o tipo de conhecimentos que os estudantes desenvolvem (Roth, 2001). Os gestos são particularmente bons para capturar o visual e as características imagéticas de uma ideia (Goldin-Meadow, Kim e Singer, 1999).

O papel dos gestos tem sido investigado empiricamente: no fazer matemática, os gestos usados por crianças na contagem (Alibali e diRusso citados em Edwards, 2003); no ensino e na aprendizagem da matemática, onde os gestos dos professores foram examinados quando ensinavam a resolução de problemas (Goldin-Meadow, Kim e Singer, 1999); no contexto de

ferramentas tecnológicas, para ajudar a compreender física e a matemática e a representação de ambas através de gráficos (Nemirovsky e Noble, 1997); no contexto da argumentação matemática, gestos de alunos universitários usados num curso de equações diferenciais (Mi-Kyung, Jung-Sook e outros, 2003).

O termo “gesto” é usado para se referir a uma grande variedade de movimentos, mas vou-me referir só aos movimentos da mão e dos braços. Os gestos são interpretados pelos outros como parte do que uma pessoa diz (comunica), são não convencionais e, acompanham ou mesmo exigem fala, com a qual formam um todo integrado. Uma característica importante dos gestos é que eles apresentam três fases bem definidas: a preparação, o golpe e a retracção. O golpe é em geral a parte mais rápida do movimento do gesto e tende a ser altamente sincronizado com acentuação da fala e conteúdo semântico. A fase de preparação é o movimento que precede o golpe (geralmente mais vagaroso), e a fase de retracção é o movimento observado depois do golpe ter sido produzido (geralmente também mais vagaroso), quando a mão regressa à posição de repouso ou à actividade em que estava empenhada (Nunez, em impressão).

Há duas teorias sobre a natureza e a função dos gestos da mão que acompanham a fala e que dominam a literatura científica actual (Roth, 2001). Uma dessas teorias a de Butterworth e Hadar sugere que os gestos não comunicam nenhuma informação semântica para além das expressões linguísticas que os acompanham. Os gestos seriam epifenómenos de expressões que surgem por si de modelos semânticos pré-existentes os quais estão na base da fala. Os gestos, segundo esta teoria, podem ter uma ou mais de quatro funções distintas: podem actuar como um sinal de proibição ou de interrupção indicando que o orador ainda não acabou; podem aumentar o potencial de activação neuronal, ajudando a mover o potencial de uma palavra, quando a activação para a palavra é baixa e demasiado vagarosa; podem facilitar a procura da palavra, explorando um caminho diferente para o léxico fonológico; podem “escapar-se” apesar de as palavras seleccionadas correspondentes terem sido censuradas e suprimidas por alguma razão antes de terem sido expressas.

A segunda teoria, de McNeill, é baseada na hipótese que os gestos e a fala partilham uma fase computacional e por isso são parte da mesma estrutura psicológica. Esta fase partilhada é também chamada “modelo semântico”. Porque a fala e o gesto são impelidos pelo mesmo modelo semântico, eles constituem modalidades alternativas para expressar o significado. Avenidas alternativas são particularmente importantes quando há falhas no léxico do orador ou quando os gestos são melhores para expressar características espaciais porque são uma modalidade expressiva mais apropriada.

Até agora os estudos empíricos não têm sido capazes de eliminar uma teoria em favor da outra. Por um lado, alguns relatórios da pesquisa registam atrasos de mais de 3.75 segundos entre os gestos e as correspondentes palavras, desafiando assim a sincronia gesto-fala que está subjacente na teoria de McNeill. Por outro lado, a facilitação de acesso lexical que forma o âmagio do modelo de Butterworth e Hadar também tem sido desafiado com os seguintes fundamentos. Primeiro, não há nenhum decréscimo significativo na frequência dos gestos quando aos indivíduos lhes é pedido que contem uma história mais que seis vezes. Segundo, os indivíduos cujos gestos foram inibidos lembraram mais palavras de baixa frequência, resultado que é inconsistente com a teoria da facilitação lexical. Ambos os resultados minam a teoria de Butterworth e Hadar a qual prediz um decréscimo na frequência dos gestos, porque palavras não familiares se tinham tornado familiares, e na ocorrência de palavras de baixa frequência, porque o efeito facilitador de gestos estava inibido (Roth, 2001).

Duas outras teorias alternativas foram recentemente propostas, mas estão ainda a ser testadas empiricamente. A primeira de Kita, reconhece que o gesto tem um papel essencial não só no processo de falar mas também no de pensar e afirma que os gestos estão envolvidos no planeamento conceptual da mensagem a ser verbalizada, de forma que ajudam o orador a empacotar a informação espacial em unidades apropriadas para a fala (Sabena, 2004). A segunda teoria de Roth e Lawless acaba com a noção de modelo semântico em situações onde os indivíduos não estão familiarizados com o contexto, apontando que em vez disso o modelo semântico é o resultado de interacções verbais e gestuais do aluno com o mundo material e social. Gestos não são só uma co-expressão de significado numa modalidade diferente, constituem também uma alpondra importante na evolução do discurso (Roth, 2001).

Estudar as relações entre gesto e fala tem-se tornado o foco de alguns investigadores em educação e estes identificaram a *concordância gesto-fala*, quando um gesto expressa a mesma informação transmitida pela expressão verbal e *discordância gesto-fala* quando um gesto contem informação não expressa na frase proferida (Goldin-Meadow, 2000). Kita (citada em Sabena, 2004) sustenta que a discordância gesto-fala aparece porque o pensamento espacial-motor explora disposições de informação que o pensamento analítico ainda não está pronto para atingir. O pensamento espacial-motor e o espaço analítico constituem ainda dois modos diferentes e contudo complementares de pensamento: o primeiro organiza a informação com esquemas de acção e a modulação deles, de acordo com as características do ambiente, enquanto que o último organiza a informação estruturando hierarquicamente padrões conceptuais descontextualizados. Esta posição difere da de McNeil que como já foi referido, mantém que para um orador o gesto e a fala formam partes complementares contudo

misturadas duma maneira intrincada de um sistema integrado único e que eles em conjunto permitem construir representações múltiplas de uma tarefa isolada.

Investigadores têm desenvolvido diferentes taxonomias de gestos e as suas classificações são baseadas nas funções particulares dos gestos ou nos modelos de produção de gestos. McNeill (citado em Roth, 2001) caracteriza quatro tipos de gestos: batimentos, gestos *deiéticos*, gestos *icónicos*, e gestos *metafóricos*, os quais vão a seguir ser descritos.

Batimentos (beats) ou *movimentos de destaque da fala* são gestos destituídos de conteúdo proposicional, apenas conferindo uma estrutura enfática à comunicação. Tipicamente, batimentos são gestos simples que podem incluir movimentos súbitos para cima e para baixo da mão ou movimentos de bater pancadinhas para dar ênfase a certas expressões da fala. Batimentos funcionam como gestos de interação, que servem para regular a coordenação de porções da fala para procurar ou pedir uma resposta, ou manifestar compreensão.

Gestos *deiéticos* são usados no apontar concreto ou abstracto. O apontar concreto é um dos primeiros gestos a desenvolver, aparecendo por volta dos dez meses de idade. Estes gestos estão dependentes do contexto. Gestos *deiéticos* são usados durante as primeiras fases do desenvolvimento da linguagem para combinar com a fala de modo a nomear objectos, indicando uma correspondência inicial do ponto de vista do desenvolvimento entre palavra e gesto. Termos *deiéticos*, tais como *aqui*, *ali*, *eu*, *tu*, *isto*, *aquilo*, derivam parte da sua interpretação do contexto no qual a interação tem lugar. Enquanto termos como *eu* e *aqui* permanecem não ambíguos porque são auto-referenciais, outros termos *deiéticos* (*isto*, *aquilo*, *ali*) permanecem indeterminados, a não ser que o orador faça qualquer movimento gestual tal como o nuto, um arregalar (ou contrair) de olhos ou um apontar para indicar o objecto referido.

Gestos *icónicos*, também chamados gestos *representativos*, incluem aqueles movimentos da mão ou do braço que têm uma relação perceptual com entidades e acontecimentos concretos. Eles tiram a sua força comunicativa do facto de serem perceptivamente similares ao fenómeno de que se está a falar. Dos gestos *icónicos* diz-se que têm uma relação transparente com a ideia que transmitem, particularmente dentro de uma narrativa na qual eles pintam objectos concretos ou acontecimentos. Comparados com os batimentos lineares vulgares, os gestos *icónicos* envolvem com muita frequência duas ou três dimensões e têm maior amplitude.

Gestos *metafóricos* são similares aos gestos *icónicos*, na medida que fazem referência a uma imagem visual, contudo estas imagens a que eles se referem, pertencem a abstracções. Por exemplo um matemático segurando uma mão enquanto move a outra até ela, até quase as

duas palmas se tocarem, quando discute o conceito de “próximo do limite” está a usar um gesto metafórico. Esta forma de gestos, aparece frequentemente em discussões técnicas envolvendo conteúdo abstracto, particularmente em áreas tais como matemática ou física. Gestos metafóricos, porque exploram a capacidade humana para a imagética visual e as vantagens cognitivas das metáforas corpóreas, podem jogar relevância particular na aprendizagem da matéria tradicionalmente difícil, abstracta. Gestos metafóricos dão literalmente corpo a entidades teóricas nunca acessíveis à percepção.

Edwards (citado em Sabena, 2004) refere-se a gesto *icónico-físico* no caso do referenciado do gesto ser concreto ou físico, (corresponde ao icónico na categoria de McNeill) e gesto *icónico-simbólico* que se refere a “símbolos escritos ou inscrições gráficas e/ou com processos associados com essas inscrições”; Arzarello (2004) fala de gesto *icónico-representacional* quando se refere especificadamente a gráficos ou a outras representações gráficas de conceitos matemáticos.

É possível deduzir duas funções para os gestos no ensino. Por um lado, pode servir aos professores como informação para avaliar a compreensão real de um tópico por um aluno, por outro, os alunos podiam ser capazes de usar os gestos dos professores como fontes adicionais para dar sentido à fala do professor (Roth, 2001). Em diferentes formas de apresentação do professor, os gestos icónicos podem ser mais facilmente apropriados que a linguagem, porque estão codificados em termos de imagens e por isso não requerem uma tradução (Roth e Lawless, citados em Roth, 2001). Os gestos podem ser usados para fornecer uma segunda representação, que se sobrepõe, mas não é idêntica à representação transmitida pela fala. Dado que o gesto é uma parte inevitável de actividade de aula, pode valer a pena aos professores prestarem atenção ao modo como movem as mãos quando ensinam, notar se transmitem a mesma informação em gesto do que quando falam e que informação é (Goldin-Meadow, Kim e Singer, 1999). Seria também importante conhecer qual a função que os diferentes tipos de gestos prestam no processo de comunicação estudante-estudante e finalmente quais são os seus papéis no conhecimento individual e social construído pelos estudantes na actividade (Roth, 2001).

Também Arzarello (2004) identificou cinco funções particulares de gestos: ter um papel directo no processo de pensamento, ser uma ferramenta para pensar; poder ser parcialmente alternativa a artefactos, como uma prótese a conduzir experiências reais com objectos virtuais; ter funções explorativas, antecipatórias e organizadoras; poder ter características sociais, pertencer ao espaço peripessoal das pessoas que estão a interagir; o gesto pode ter características sociais e poder contribuir para a dialéctica da construção social do conhecimento, desde que o professor encoraja o gesto na aula.

Há forte evidência que gestos deícticos servem uma função comunicativa, mas o valor dos gestos icónicos e metafóricos permanece questionado. Se os gestos não comunicam nada, então é possível que eles sirvam apenas o orador. Por outro lado, se eles comunicam informação, eles tornam-se uma fonte importante em interações discursivas, como é sugerido por alguns relatórios de pesquisa que apontam que os ouvintes estejam atentos aos gestos dos outros. Apesar das suas diferenças, a maior parte das teorias sobre gestos sugerem que os gestos icónicos imitam uma componente cognitiva visual que está semanticamente relacionada com um conceito ou unidade do discurso que corresponde ao gesto e esta ideia sugere que os gestos podem realmente fornecer alguma compreensão sobre a mente do orador (Roth, 2001).

Os gestos das crianças não são movimentos ao acaso, mas revelam antes opiniões importantes sobre a tarefa em mãos. Gestos jogam um papel importante na aprendizagem, no desenvolvimento e comunicação das crianças, no proporcionar apoio cognitivo quando as crianças tentam falar de tarefas difíceis (Evans e Rubens citados em Roth, 2001), no fornecer uma visão dos pensamentos dos alunos e talvez estimular também esses pensamentos (Goldin-Meadow, citada em Roth, 2001), no oferecer ao aluno uma maneira mais simples para expressar e explorar ideias que podem ser difíceis de pensar num formato verbal, minorando assim a carga cognitiva do aluno (Goldin-Meadow, 2000).

As experiências sobre gestos, conduzidas na Universidade de Chicago por Susan Goldin-Meadow e seus associados, levam a autora a fazer quatro afirmações essenciais. Primeira, os gestos revelam conhecimento que não é expresso na fala. Segunda, os gestos revelam conhecimento implícito ou emergente, que é expresso na fala só mais tarde. Terceira, a *má combinação* (discordância) entre gesto e fala é uma indicação de "estar pronto para aprender". Relativamente a um determinado conceito, aquelas crianças que apresentam compreensão discordante através do gesto e da verbalização deveriam tirar maior benefício do ensino do que as crianças que mostram concordância mas compreensão conceptual incorrecta. Quarta, as mudanças na relação gesto-fala podem ser interpretadas como reflectindo um caminho de mudança de conhecimento, isto é, a variabilidade do conhecimento manifesta-se por si em misturas entre expressões verbais e gestuais nas explicações das crianças.

Relativamente à primeira e à segunda afirmação, vários estudos mostram que para conceitos particulares, os estudantes podem ser colocados num dos seguintes três estádios. Primeiro estádio: as crianças, geralmente as mais novas, expressam uma compreensão conceptual incorrecta em ambas as modalidades gestual e fala. Segundo estádio: outras crianças expressam gestualmente compreensão conceptual correcta, enquanto a sua fala ainda expressa compreensão conceptual incorrecta. Finalmente num terceiro estádio: algumas

crianças (geralmente as mais velhas ou instruídas) expressam correctamente o conceito tanto por meio gestual como verbal. Crianças que estão em transição em relação a um determinado conceito, podem ser identificadas na base da inconsistência da informação transmitida pela fala com a transmitida pelo gesto, em vez na inconsistência da informação transmitida só pela fala (Perry e outros citados em Roth, 2001).

Há prova que a discordância entre gesto e fala tem significância cognitiva não só para a aprendizagem como para estratégias de resolução de problemas (Garber e Goldin-Meadow, 2002). “A discordância entre gesto e fala pode apontar estabilidade cognitiva e daí prever saídas de aprendizagem” (p. 818) é um tipo de indicação. As crianças, que produzem muitas discordâncias quando explicam as suas respostas a um conjunto de problemas de matemática ou de conservação, estão num estágio cognitivo instável relativamente aqueles problemas. Se lhes for fornecido ensino adequado, eles melhorarão na tarefa, se não, eles recuam para um estágio mais estável, mas menos avançado. Estas crianças estão mais prontas para aprender que aquelas crianças que produzem poucas discordâncias na mesma tarefa. Também a “discordância entre gesto e fala pode prever futuras estratégias de resolução de problemas” (p. 818). Quando se pede a adultos para reformularem de modo diferente um problema de mudança contínua, por exemplo, o puzzle torre de Hanoi, frequentemente eles transmitem informação nos seus gestos que não é encontrada nos seus discursos. Quando mais tarde, se lhes pergunta como resolveriam o problema, aqueles adultos recorrem não só a estratégias compatíveis com a descrição falada do problema, como também às estratégias compatíveis com as suas descrições gestuais – recorrem em igual número. A discordância entre gesto e fala parece reflectir assim a activação de duas estratégias de solução para um único problema. Os gestos podem então servir como auxiliar para a fala quando se tenta descobrir processos cognitivos na solução de problemas (Garber e Goldin-Meadow, 2002).

Conclusões tiradas de vários estudos, destinados a compreender os gestos em situações onde estudantes argumentavam cientificamente acerca de modelos gráficos desenhados, modelos gráficos baseados em computador que se movimentam e modelos tridimensionais de estruturas arquitectónicas, afirmam: na ausência de discurso científico apropriado, os gestos dos estudantes apanham, descrevem e explicam os fenómenos científicos de maneiras que são compatíveis com explicações científicas; durante o aparecimento inicial de expressões científicas adequadas, os gestos deícticos e icónicos precederam as expressões associadas e o atraso decresce com o aumento da correcção; à medida que a familiaridade do domínio aumenta, a fala científica toma uma maior importância e os gestos começam a coincidir com a fala (Roth, 2001).

Gestos bem como a sua função foram identificados em alunos, na investigação empírica que coexistiu com a exploração teórica do modelo de pensamento visual-espacial proposto.

2.6. Dimensão sócio-cultural da aprendizagem

A importância da dimensão social para as construções cognitivas das mentes dos alunos e para a aprendizagem é uma questão considerada relevante (Cobb, Yackel, e Wood, 1992; Dörfler, 1991; Presmeg, 1992; Saxe e Bermudez, 1996; Sekiguchi, 2000). Vou apresentar alguns elementos essenciais da perspectiva sócio-cultural da construção do conhecimento fundamentalmente a de Vygotsky, para o qual a aprendizagem é função da interacção social:

“A aprendizagem humana pressupõe uma natureza social específica e um processo pelo qual as crianças crescem e se introduzem na vida intelectual que as rodeia”(1978, p. 88).

“Toda a função no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes: primeiro aparece no plano social e mais tarde no plano individual; primeiro *entre* pessoas (*interpsicológico*), e depois no *interior* da criança (*intrapsicológico*). Isto aplica-se igualmente à atenção voluntária, à memória lógica e à formação de conceitos. Todas as funções mais elevadas se desenvolvem como relações efectivas entre indivíduos humanos” (1978, p. 57).

A teoria psicológica desenvolvida por Vygotsky fica explícita em três ideias centrais, que podem ser consideradas os pilares básicos do pensamento de Vygotsky: “as funções psicológicas têm um suporte biológico pois são um produto da actividade cerebral”, “o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior” e “a relação entre o homem e o mundo é mediada por sistemas simbólicos”. O primeiro postulado pressupõe que o cérebro é a base biológica do funcionamento psicológico e é um sistema aberto, de grande plasticidade, cuja estrutura e modos de funcionamento são moldados ao longo da história da espécie e do desenvolvimento individual. O segundo pressuposto de Vygotsky diz-nos que o homem se transforma de biológico em sócio-histórico, num processo em que a cultura é parte essencial da constituição humana. O terceiro postulado vygotkiano fala do conceito de *mediação* que rotula a relação entre o homem e o mundo como não directa, onde os sistemas simbólicos são elementos intermediários entre o sujeito e o mundo (Oliveira, 1993).

2.6.1. Mediação

Mediação é um conceito central para a compreensão das concepções vygotskianas sobre o funcionamento psicológico e, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa de ser directa, e passa a ser mediada por esse elemento (Oliveira, 1993). A mediação pode então ocorrer a partir da utilização de diferentes tipos de ferramentas. Vygotsky distingue dois tipos de elementos mediadores na actividade humana: *as ferramentas técnicas* e os *signos* (ferramentas psicológicas e ferramentas de mediação semiótica). Ambos são parte da herança cultural da humanidade, foram produzidos e usados pelos seres humanos, desenvolvendo-se gradualmente ao longo de séculos, mas mantendo as suas funções. Embora claramente distintos, Vygotsky supõe signos e ferramentas na mesma categoria de mediadores. Pelo que toca à sua função, a diferença entre signo e ferramenta assenta na diferente maneira como orientam o comportamento humano. A função de uma ferramenta está externamente orientada, o seu propósito é servir como condutor da actividade humana para dominar a natureza. A função de um signo está orientada para dentro, é um meio de actividade interna para gerir o eu. De acordo com Vygotsky o domínio da natureza e o domínio do eu estão estritamente ligados.

Um *processo de internalização* pode transformar ferramentas em ferramentas psicológicas quando uma ferramenta externamente orientada se torna uma ferramenta psicológica (que pode lidar com representações mentais) e modela novos significados. Neste sentido uma ferramenta pode funcionar como um *mediador semiótico*. O processo de *mediação semiótica* desenvolve-se a vários níveis, embora centrado no uso de um *artefacto*. O *artefacto* é objecto particular com características intrínsecas, concebido e construído de forma a executar uma tarefa particular (Vygotsky chamou-lhe ferramenta) e há também a noção de *instrumento* que segundo Rabardel (citado em Mariotti, 2002) se refere ao sujeito e diz respeito às contrapartidas mentais de um uso bem adaptado de um artefacto particular (Vygotsky chamou-lhe ferramenta psicológicas). Então fica evidenciado um nível do processo de mediação semiótica, quando um aluno usa o artefacto de acordo com certos esquemas de utilização, para atingir o objectivo da tarefa. Ao fazer isto, significados emergem do envolvimento do sujeito na actividade.

Um segundo nível do processo de mediação semiótica envolve o uso do artefacto pelo professor, de acordo com esquemas de utilização específicos, para explorar estratégias de comunicação com o fim de guiar a evolução de significados dentro da comunidade da sala de aula. Na dialéctica entre estes dois níveis, a construção de significados ocorre como o produto de um processo de internalização guiada pelo professor (Mariotti, 2002). O artefacto sob a

orientação do professor pode produzir de maneira “natural” efeitos cognitivos e didáticos importantes (Arzarello, 2004). O computador também pode ser usado como um instrumento de mediação semiótica, mas o uso consciente de tecnologia para mediação semiótica exige um planeamento das actividades atento e cuidadoso, tendo em conta o uso duplo do artefacto em jogo (Mariotti, 2002). Mariotti conjectura a seguinte hipótese: Significados são enraizados na experiência fenomenológica (acções do utilizador e feedback do ambiente do qual o artefacto é uma componente), mas a sua evolução é atingida por meio de construção social na aula, sob a orientação do professor.

2.6.2. *O pensamento e a linguagem*

Os sistemas simbólicos e particularmente a linguagem (sistema simbólico básico de todos os grupos humanos) exercem um papel fundamental na comunicação entre indivíduos e no estabelecimento de significados compartilhados que permitem interpretações dos objectos, acontecimentos e situações do mundo real (Oliveira, 1993). Para Vygotsky é fulcral compreender as relações entre o desenvolvimento da linguagem e o pensamento já que a linguagem é também um instrumento do pensamento, pois tem a função de *pensamento generalizante* (ordena o real, agrupando todas as ocorrências de uma mesma classe de objectos, acontecimentos e situações sob uma mesma categoria conceptual). O pensamento e a linguagem têm origens diferentes e desenvolvem-se segundo trajectórias diferentes e independentes. A linguagem, sob a forma de discurso, evolui dos gestos, respostas afectivas e desenvolve-se num contexto de comunicação e interacções sociais. O pensamento especialmente o pensamento lógico, evolui da actividade em que a criança está envolvida. Num determinado momento do desenvolvimento filogenético, os processos de desenvolvimento do pensamento e da linguagem unem-se, surgindo o pensamento verbal e a linguagem racional. O ser humano passa a ter a possibilidade de um modo de funcionamento psicológico mais sofisticado, mediado pelo sistema simbólico da linguagem (Oliveira, 1993).

Vygotsky ao investigar a relação entre o pensamento e a linguagem considerou que a *significação* da palavra é a unidade de base indecomponível que reflecte sob a forma mais simples a unidade de pensamento e a unidade da linguagem. Uma palavra privada de significado, não é uma palavra é um som vazio. Por consequência a *significação* é um signo distintivo necessário, constitutivo da própria palavra. É a própria palavra, tomada sob o seu aspecto interno, é um fenómeno da linguagem. Mas sob o ângulo psicológico, a *significação* da palavra não é senão uma generalização ou um conceito. Toda a generalização, toda a

formação de conceitos é um acto de pensamento autêntico, incontestável assim podemos considerar a *significação* da palavra como um fenómeno do pensamento.

Vygotsky descobriu também que as significações das palavras não são imutáveis, constantes, invariáveis, elas desenvolvem-se, podem-se modificar. Se a significação da palavra se pode modificar é porque a relação do pensamento e da palavra se modifica também, e é importante descobrir o papel funcional da significação da palavra no acto do pensamento. As crianças usam palavras para efeitos de comunicar e organizar as suas próprias actividades antes de terem uma compreensão completa do que essas palavras significam. O significado da palavra é dado à criança pelo uso dessa palavra num discurso aceite histórica e socialmente. O uso funcional da palavra ou de qualquer outro signo joga um papel central na formação de conceitos como um meio de focar a nossa atenção seleccionando características, e analisando-as e sintetizando-as. Os adultos através das suas comunicações verbais com a criança são capazes de pré-determinar o caminho do desenvolvimento de generalizações até ao seu ponto final – um conceito completamente formado (Vygotsky, 1985).

O indivíduo, segundo Vygotsky, é então activo no seu próprio processo de desenvolvimento humano e para esse percurso de desenvolvimento é importante a actuação dos outros membros do grupo social na mediação entre a cultura e o indivíduo e na promoção de processos interpsicológicos que serão posteriormente internalizados (processos intrapsicológicos de reconstrução interna de actividades externas). Vygotsky postula para o processo do desenvolvimento do pensamento e da linguagem que o percurso é da actividade social, interpsíquica para a actividade individualizada, intrapsíquica, ou melhor a evolução gradual dum discurso comunicativo para um discurso interior onde aparece um procedimento de transição o discurso egocêntrico.

O *discurso comunicativo* tem por função manter um contacto social, a comunicação com os outros, sendo o pensamento traduzido por palavras. O *discurso interior* representa uma forma interna de linguagem, dirigida ao próprio sujeito e não a um interlocutor externo. É um discurso sem vocalização, voltado para o pensamento, cuja função é auxiliar o indivíduo nas suas funções psicológicas. É fragmentado, abreviado, contendo quase só núcleos de significado e não todas as palavras usadas num diálogo com outros. O *discurso egocêntrico* é o discurso quando o indivíduo pensa alto, quando fala sozinho, independentemente da presença de um interlocutor. O discurso egocêntrico acompanha a actividade da criança, começando a ter uma função pessoal, ligada às necessidades do pensamento. É utilizado como apoio ao planeamento de sequências a serem seguidas, como auxiliar na resolução de problemas. Aparece como um procedimento de transição, no qual o discurso já tem a função

que terá como discurso interior, mas ainda tem a forma de fala socializada externa (Oliveira, 1993).

2.6.3. *Interações e a aprendizagem*

A parte central da abordagem de Vygotsky é o papel dos outros mais capazes os quais facilitam o desenvolvimento da criança por “andaime” dentro da *zona de desenvolvimento proximal* (ZDP). A ideia de Vygotsky sobre *zona de desenvolvimento proximal* foi introduzida, a partir do postulado que existem dois níveis de desenvolvimento do aluno – o real e o potencial, e foi definida como:

“A distância entre o nível de desenvolvimento real a resolver problemas independentemente e o nível de desenvolvimento potencial determinado a resolver problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais competentes” (Vygotsky, 1978, p. 86).

A zona de desenvolvimento proximal é um domínio psicológico em constante transformação: aquilo que uma criança é capaz de fazer com a ajuda de alguém hoje, conseguirá fazer amanhã sozinha. A zona de desenvolvimento proximal define então aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão ainda em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Estas funções poderiam ser chamadas de “botão” ou “flores” do desenvolvimento em vez de “frutos” do desenvolvimento (Vygotsky, 1978, p. 86).

Vygotsky postula então a importância da actuação de outros membros do grupo social na mediação entre a cultura e o indivíduo e na promoção dos processos interpsicológicos que serão posteriormente internalizados. A intervenção deliberada dos membros mais maduros da cultura na aprendizagem das crianças é essencial ao seu processo de desenvolvimento. Vygotsky fala da *imitação* e define-a como a reconstrução individual daquilo que o indivíduo observa nos outros, mas defende que só é possível imitação de acções que estejam na ZDP do sujeito, caso contrário não conseguirá apropriar-se desses mesmos conceitos. A intervenção pedagógica do professor tem pois um papel central na trajectória dos indivíduos que passam pela escola. O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente. Também uma criança mais avançada num determinado assunto pode contribuir para o desenvolvimento das outras. Pode funcionar como mediadora entre uma outra criança e as acções e significados estabelecidos como relevantes no interior da cultura (Oliveira, 1993).

2.6.4. Apropriação

Um conceito central, na perspectiva sociocultural da aprendizagem dos neo-vygotsianos, é o de *apropriação* usado para descrever como a aprendizagem é mediada por interacção com outros e como as crianças aprendem quando adultos os guiam ou ensinam. O conceito de *apropriação* tem sido usado para descrever como os que aprendem usam ferramentas culturais de gerações anteriores e os recursos fornecidos por outras pessoas (Moschkovich, 2004).

Rogoff (citado em Moschkovich, 2004) usa apropriação como uma alternativa a internalização e descreve-a como o produto de pensamento partilhado e participação guiada. Ele enfatiza que apropriação não é transmissão ou imitação, porque os que aprendem transformam informação e competências. Radford (2000) que usou a noção de apropriação para se focar na apropriação de “expressões matemáticas técnicas” destaca que a apropriação envolve não uma cópia mas uma adaptação das palavras em termos das nossas necessidades pragmáticas e intenções particulares e que os estudantes fornecem às palavras do professor novos significados ao interagirem entre si. Moschkovich (2004) que usou o conceito de apropriação para descrever como os estudantes aprenderam a trabalhar com funções lineares lembra que apropriação aqui incluiu transformação.

Na investigação empírica que coexistiu com a exploração teórica do modelo de pensamento visual-espacial proposto, a dimensão do sócio-cultural vai ser examinada em relação à interacção entre alunos, à intervenção da investigadora e às interacções com o micromundo Tarta.

Capítulo III

Metodologia

Neste capítulo será descrita a metodologia adoptada para a implementação da presente investigação a qual teve um carácter essencialmente qualitativo, com um cunho descritivo e interpretativo. Este estudo pretende elaborar, explorar e refinar um modelo teórico sobre o pensamento visual-espacial e compreender, a partir desse modelo, como o pensamento visual-espacial dos alunos se desenvolve, identificando modos de pensamento visual-espacial e evidenciando como esses modos de pensamento visual-espacial foram socialmente vividos. Também esta investigação, no contexto global visual e dinâmico da geometria das transformações onde nos concentramos nos movimentos rígidos, isometrias, que movem figuras planas, quer construir exemplos de modelos didáticos para a compreensão do pensamento visual-espacial e identificar, não só processos de pensamento que os alunos utilizam na execução de tarefas geométricas, mas também determinar os seus níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico para movimentos.

Para que os objectivos acima mencionados fossem atingidos, a abordagem metodológica do estudo implicou cinco vertentes que por vezes ocorreram em simultâneo: desenvolvimento do modelo teórico, desenvolvimento dos ambientes de ensino, desenvolvimento e administração de tarefas geométricas, implementação dos ambientes de ensino e recolha e análise de dados envolvendo esta última fundamentalmente a refinação e avaliação do modelo teórico e o nível de desenvolvimento geométrico dos alunos.

O desenvolvimento do modelo teórico foi uma construção gradual que surgiu fundamentalmente das muitas leituras e reflexões sobre o pensar visual-espacial. O desenvolvimento dos ambientes de ensino foi tratado com o fim de esses ambientes serem experienciados por alunos num ambiente natural de aula. Com o desenvolvimento das tarefas geométricas pretendia-se saber os conhecimentos geométricos dos alunos de duas turmas, e

determinar os níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico para movimentos e identificar modos de pensar visual-espacial dos alunos antes e depois de estes serem sujeitos aos ambientes de ensino. A vertente ligada à validação do modelo pretende ver se o paradigma de que partimos é coerente e funciona bem.

Foi decidido utilizar uma amostra diversificada, com o fim de enriquecer e variar o contexto onde se pretendia desenvolver e estudar o pensamento visual-espacial dos alunos. Optei por recorrer a duas metodologias de ensino implementadas em duas turmas do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico. Em cada uma destas turmas centrei a minha observação em alunos com desempenhos diferentes. Não foi intenção deste estudo comparar quer as duas metodologias, quer os alunos com diferentes desempenhos.

3.1. Desenvolvimento do modelo teórico

No sentido de levar por diante o objectivo de elaborar um modelo teórico sobre o pensamento visual-espacial foi feita uma revisão da literatura sobre os processos mentais que se relacionam com o pensar visual e com o pensar espacial. Foi feito o aprofundamento teórico de seis tópicos, grandes eixos sustentáculos deste trabalho: a intuição, a abstracção, a actividade da mente, a imagética e as capacidades espaciais, a matemática corpórea e os mecanismos conceptuais metáforas e gestos e a dimensão sócio-cultural da aprendizagem. Foi então criado um modelo teórico inicial referente ao pensamento visual-espacial como resultado da combinação de senso comum com conjecturas, afirmações e preocupações vindas da leitura da pesquisa disponível sobre o pensamento visual-espacial. O capítulo IV deste trabalho descreve esse modelo teórico inicial referente ao pensamento visual-espacial.

3.2. Desenvolvimento dos ambientes de ensino

Para validar o modelo teórico de pensamento visual-espacial era preciso um contexto empírico que por sua vez necessitava de materiais didácticos. A vertente do estudo denominada desenvolvimento dos ambientes de ensino está relacionada com o segundo objectivo que se propunha desenvolver, isto é, conceber, implementar e avaliar, dois modelos didácticos para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial e em particular reconhecer o nível de desenvolvimento geométrico evidenciado nos alunos.

Assim foi escolhido um domínio de trabalho e para ele foram desenvolvidos dois ambientes de ensino, o micromundo Tarta e sessões de ensino. Foi igualmente elaborado um programa de sensibilização das professoras aos ambientes de ensino. A avaliação da

intervenção didáctica foi feita em função dos níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos alunos após aquela intervenção didáctica. O capítulo VI deste trabalho dá conta do desenvolvimento dos ambientes de ensino.

3.3. Desenvolvimento e administração de tarefas geométricas

Tarefas geométricas foram construídas pela investigadora para serem por ela administradas aos alunos antes e depois do ambiente de ensino (apêndice A).

3.3.1. Desenvolvimento de tarefas geométricas

Um conjunto de tarefas geométricas foi elaborado para identificar modos de pensamento visual-espacial, averiguar o desenvolvimento do raciocínio geométrico e identificar processos de pensamento visual-espacial dos alunos. São oito as tarefas geométricas tendo como propósitos essenciais: transformar mentalmente objectos; reconhecer figuras congruentes e determinar a congruência através dos movimentos; identificar transformações; executar mentalmente os movimentos virar, deslizar e rodar; conhecer as características dos movimentos virar, deslizar e rodar; diferenciar simetria rotacional de simetria reflexional. O Quadro 3.1 apresenta os objectivos subjacentes à execução das tarefas geométricas.

Quadro 3. 1. Objectivos das tarefas geométricas.

Tarefas	Objectivos
Tarefa I	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar conhecimentos sobre: vértice, lado e diagonal de figuras planas, propriedades de figuras geométricas planas. - Reconhecer formas criadas por pavimentação de figuras mais pequenas. - Reconhecer figuras congruentes. - Actuar sobre objectos, manipular movimentos.
Tarefa II	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer e lembrar mentalmente a forma de objectos. - Transformar mentalmente objectos. - Estimar visualmente.
Tarefa III	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer formas congruentes e determinar a congruência através de movimentos. - Identificar transformações. - Executar mentalmente os movimentos virar, deslizar e rodar. - Conhecer as características dos movimentos virar, deslizar e rodar.

Tarefa IV	<ul style="list-style-type: none"> - Ver uma forma como parte de uma figura maior. - Reconhecer formas embutidas. - Manipular mentalmente objectos. - Estimar visualmente.
Tarefa V	<ul style="list-style-type: none"> - Imaginar o que um objecto se parece quando reflectido em torno de uma recta, rodado em torno de um ponto ou deslizado numa dada direcção. - Identificar visualmente uma transformação no plano. - Reconstruir e seleccionar uma transformação.
Tarefa VI	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar visualmente objectos geométricos. - Aplicar conhecimentos sobre: ângulo recto, ângulo raso e as medidas das suas amplitudes; rectas paralelas e rectas perpendiculares; recta verticais e recta horizontais. - Manipular mentalmente a transformação rotação.
Tarefa VII	<ul style="list-style-type: none"> - Diferenciar simetria rotacional de simetria reflexional. - Construir simetria reflexional e simetria rotacional. - Manipular mentalmente objectos.
Tarefa VIII	<ul style="list-style-type: none"> - Compreender que a forma e o tamanho permanecem invariáveis após as transformações translação, reflexão e rotação. - Identificar a posição final das imagens das figuras sujeitas àquelas transformações. - Reconhecer a imagem final correcta de uma forma sujeita a cada uma das transformações. - Identificar os movimentos mentalmente manipulados e caracterizados correctamente virar, deslizar e rodar. - Coordenar a linguagem com diferentes sistemas de referência.

A estrutura e conteúdos de algumas dessas tarefas são adaptações de ideias já criadas por outros:

tarefa II	C.E.C. (1987);
tarefa IVA	C.E.C. (1987);
tarefa V	Young (1982);
tarefa VIC	Gordo (1993);
tarefa VIIA	Morris (1987);
tarefa VIID,	Morris (1987);
tarefa VIIIA	Lewellen (1992);
tarefa VIIC	Johnson-Gentile (1990).

As restantes tarefas foram construídas por mim. Através do estudo da execução da tarefa pelos alunos pretendia-se conhecer as imagens dos alunos relativas a certos conceitos e ver como os alunos aplicam certos conhecimentos geométricos (tarefa I e tarefa VI). As restantes seis tarefas estão relacionadas com a manipulação mental de imagens, com o uso de capacidades espaciais e com os três tipos de movimentos: *deslizar* (translação, como quando uma figura se desloca numa página), *virar* (reflexão, isto é, quando uma figura é voltada em três dimensões) e *rodar* (rotação, como quando a figura é rodada de 90° no plano).

3.3.2. Administração das tarefas geométricas

Os sujeitos para este estudo eram 40 no total, sendo 21 alunos pertencentes à turma A, que usaram na aula o micromundo Tarta e outros materiais manipuláveis sem computador e 19 alunos da turma B cujas tarefas na aula envolviam só actividades com materiais manipuláveis sem computador. Os estudantes do 4º ano tinham aproximadamente 9 anos de idade. Nenhum aluno das duas turmas tinha, até à experiência, utilizado o computador na aula.

Cada aluno respondeu individualmente a tarefas geométricas, administradas pela investigadora, fora da sala de aula, antes de ser sujeito ao ambiente de ensino planeado. Devido a restrições do tempo, ligadas com o final do ano lectivo, só sete alunos da turma A (Abel, Bárbara, Carlota, Delfim, Edgar, Felisberta, e Gil) e cinco da turma B (Aldino, Berta, Carolino, Dália, Ester) responderam novamente às tarefas geométricas administradas pela investigadora, fora da sala de aula, após o ambiente de ensino.

As oito tarefas geométricas foram administradas individualmente aos alunos pela investigadora, antes e depois da implementação dos ambientes de ensino, fora da sala de aula (Março e Junho de 1996). As respectivas entrevistas foram vídeo-gravadas. As direcções das duas escolas a que os alunos pertenciam facultaram uma sala para esse acontecimento. A execução daquelas tarefas pelos alunos era feita simultaneamente com o funcionamento normal da aula e era a respectiva professora que facilitava e escolhia o aluno que deveria sair da sala de para se encontrar com a investigadora. Pretendia-se que na aula, a perturbação fosse mínima.

Devido à extensão do conjunto das tarefas, este foi apresentado aos alunos em duas partes, sendo então cada uma resolvida em dias diferentes, levando em média cada aluno cerca de 30 minutos a completar cada uma das partes. Da primeira vez que as tarefas geométricas foram administradas, a investigadora tinha uma conversa com cada aluno, onde lhe era dito que ela e a respectiva professora estavam a fazer um trabalho em conjunto e que

gostariam que ele respondesse a algumas questões. Era-lhe afirmado que não estava a ser avaliado, que podia ou não responder e, que quando estivesse cansado ou não quisesse continuar, bastava dizer (nenhum aluno desistiu das tarefas).

A investigadora administrou as tarefas geométricas aos alunos como se de entrevistas se tratasse, fomentando o diálogo. Por vezes, foi necessário colocar aos alunos algumas perguntas complementares, para melhor clarificação das tarefas que estavam a ser executadas, mas tendo sempre como preocupação a neutralidade da investigadora relativamente ao conteúdo da resposta, bem como que a execução da tarefa não constituísse por si uma aprendizagem.

Devido a restrições de tempo ligadas com o final do ano lectivo, não poderíamos passar a todos os alunos de cada turma, após a experiência de ensino, Junho de 1996 (passado 8 dias da experiência), as tarefas geométricas atrás mencionadas (mas em menor número). Assim foi seleccionado pelas professoras um grupo de alunos de cada turma, para responderem àquelas tarefas. A escolha foi feita em função dos desempenhos dos alunos em matemática e de forma que estivesse envolvido naquele grupo de alunos de cada turma pelo menos um bom aluno, um aluno médio e um aluno fraco. As tarefas que se entendeu eliminar para diminuir a extensão do conjunto das tarefas foram aquelas em que os alunos não tiveram grande dificuldade em executar: I (A) e VII (B).

3.4. Implementação dos ambientes de ensino

Os dois ambientes de ensino onde se pretendia fomentar o desenvolvimento do pensamento visual-espacial só foram implementados depois de duas condições terem sido satisfeitas: os alunos terem tido uma sessão introdutória para relembrar alguns conceitos geométricos, como tinha sido sugerido pelas respectivas professoras, durante o programa de sensibilização já referido; a investigadora ter administrado individualmente a cada aluno das duas turmas, as tarefas geométricas (apêndice A).

Assim de Abril a Maio de 1996, os dois ambientes de ensino foram implementados um nas aulas da turma A (13 sessões) e o outro nas aulas da turma B (12 sessões) pelas respectivas professoras e pela investigadora que funcionou em equipa com cada uma delas. Também muitas vezes se manteve uma colaboração onde o trabalho em equipa era verdadeiramente interactivo e não diferenciado.

As actividades incluíram trabalho em grande grupo, em pequenos grupos de trabalho onde todos os alunos tinham a mesma tarefa e cada grupo executava essa tarefa e trabalho individual. Com o trabalho em grande grupo pretendia-se não só fomentar discussões

colectivas, como também permitir melhorar a linguagem dos alunos e captar possíveis dificuldades.

Para a turma A as sessões sem computador foram a maior parte das vezes audiogravadas. Nas sessões *ventoinhas*, *o papagaio*, *frisos*, *a tenda* e *a flor* que usaram o micromundo Tarta, os alunos da turma A trabalharam sempre em díade. A escolha dos pares foi feita de forma a não haver grande diferença em conhecimentos matemáticos dos elementos dos grupos. Um desses pares de alunos (com bom desempenho em Matemática, identificado pela professora), desde a primeira sessão, era acompanhado por um vídeo gravador que registou toda a aprendizagem. Um outro par de alunos (identificados como médios fracos em Matemática pela professora), foi observado a partir da segunda sessão, *o papagaio*, (só então é que foi possível colocar uma câmara vídeo a gravar a respectiva aprendizagem). As sessões com o micromundo Tarta, não só envolviam a introdução gradual dos comandos do micromundo, como a apresentação de diferentes aspectos das transformações geométricas. As tarefas eram primeiro cuidadosamente descritas a toda a turma pela investigadora e depois cada grupo de alunos era responsável pela tarefa, podendo solicitar sempre que necessário, o apoio da investigadora e da professora. Em duas das sessões, alguns computadores funcionaram mal e os respectivos alunos tiveram que se juntar a outros grupos, o que não só os desmotivou, como fez com que as atenções da professora e da investigadora fossem essencialmente dirigidas para a resolução desses problemas e menos para o apoio aos grupos.

Para a turma B as sessões foram a maior parte das vezes audiogravadas e no decorrer das sessões houve também imprevistos de última hora. Por exemplo, duas sessões tiveram de continuar num outro dia para serem completadas (por atraso no começo de uma sessão, já que os alunos tinham chegado tarde da visita a um museu e a professora achou oportuno trabalhar na sessão o ângulo no geoplano), alterando assim as datas previstas para as restantes sessões. Consequentemente a programação inicial das sessões teve que ser alterada para a turma B. Esta turma não tinha qualquer possibilidade de ter mais sessões para além da 12ª sessão, porque tal iria colidir com a programação da escola há muito planeada. A 11ª sessão da turma B teve então uma duração de cerca de 75 minutos (30+45) e envolveu os conteúdos referentes às sessões designadas por *Peças hexagonais* e *Pavimentar* e a 12ª sessão da mesma turma incluiu o conteúdo da 13ª sessão *O jogo com tetraminós*.

A duração de cada sessão foi em média cerca de 45 minutos para os dois ambientes de ensino. Parece poder dizer-se que os ambientes de ensino criados foram motivantes para os alunos e confortáveis pois não eram ensombrados pela avaliação.

As descrições das sessões de ensino da turma A estão no apêndice D e a implementação dessas sessões na aula foi muito próxima da idealizada pelas professoras e

pela investigadora. As descrições de sessões de ensino relativas à turma B estão apresentadas no apêndice C e no sentido de completar essas descrições evidenciam-se: excertos de discussões na aula orquestradas pela professora; tipos de problemas com que a professora se deparou e a estratégia utilizada para os enfrentar; a forma como a professora interpretou e adaptou o desenho didático do ambiente de ensino.

No Quadro 3.3 esboçam-se os conteúdos das diferentes sessões de ensino, a ordem como eles ocorreram e uma interpretação de relações entre o ensino informal dos movimentos e as fases de aprendizagem de Van Hiele. Pretendi que o ambiente de ensino idealizados fossem desenvolvidos seguindo uma sequência de aprendizagem próxima da envolvida nas fases de aprendizagem de Van Hiele.

Van Hiele propôs que a aprendizagem é um processo que progride de forma recursiva através de níveis discretos de pensamento, que pode ser melhorada por um processo didático adequado. Ele supôs que há vários níveis de pensamento geométrico e que a passagem de um nível para o seguinte ocorre através de uma sequência de fases de ensino. Os Van Hiele identificaram os seguintes níveis de pensamento geométrico: nível 1 (Visualização), nível 2 (Descritivo), nível 3 (Teórico), nível 4 (Formal lógico). O programa de ensino-aprendizagem que pode influenciar a transição de um nível para o seguinte compreende uma sequência didática precisa de cinco *fases* ou *estádios* de aprendizagem (Quadro 3.2): informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração (Van Hiele, 1986).

Quadro 3.2. Fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele.

Fases	Descrições
Informação	O professor estabelece um conversa com os estudantes por forma que eles fiquem ao corrente com o domínio que vão trabalhar.
Orientação guiada	Os estudantes são guiados por tarefas que eles mesmo estabelecem ou que são dadas pelo professor, para encontrar redes de relações entre os objectos que estão a manipular. O propósito é guiar os estudantes através da diferenciação de novas estruturas das observadas na primeira fase.
Explicitação	Os estudantes dão as suas opiniões sobre as regularidades que encontraram, tomam consciência de relações e expressam-nas por palavras em discussões na sala de aula. O professor introduz agora toda a linguagem técnica.
Orientação livre	O professor dá aos estudantes tarefas gerais e eles têm oportunidade de se familiarizarem com o tópico sob todos os pontos de vista.

Integração	O professor não apresenta nada de novo. Os estudantes constróiem uma “visão global” do que tinham aprendido antes. As descobertas novas são integradas nas estruturas existentes e assim se promove o processo de transtruturação. O papel do professor é ajudar os alunos a verem como tudo se ajusta.
------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Foi utilizada nos ambientes de ensino uma estrutura de etapas de aprendizagem para cada movimento sempre pela mesma ordem e de forma cíclica (Quadro 3.3). Por exemplo, para o movimento rodar no ambiente de ensino da turma A, à fase de informação (sessão *Os movimentos*), segue-se a fase de orientação guiada (sessão *O rodar*), seguida pela fase de explicitação (sessão *O rodar e o geoplano*), depois a fase de orientação livre (sessão *Ventoinhas*). A simetria rotacional foi ensinada segundo a sequência: fase de informação→fase orientação guiada→fase de explicitação→fase de orientação livre. Como para a simetria reflexional pareceu que os alunos possuíam a informação adequada, a sequência de aprendizagem ficou reduzida a: fase orientação guiada→fase de explicitação→fase de orientação livre. O conceito de congruência só foi tratado de forma explícita a nível de familiarização e de exploração na primeira sessão. Depois foi sendo sempre implicitamente tratado ao longo de todas as sessões de ensino. As duas turmas não tiveram a possibilidade de participar numa sessão que envolvesse a fase de integração conjunta dos movimentos, rodar, virar e deslizar e simetrias, contudo a natureza das tarefas propostas nas sessões e a forma como elas foram abordadas permitiram fornecer aos alunos uma sumariação dos conhecimentos.

Quadro 3.3. Fases de aprendizagem de Van Hiele e as sessões de ensino.

Sessões	Conteúdos geométricos	Fases de aprendizagem	
		Turma A	Turma B
<i>Os movimentos</i>	-Movimentos: rodar, virar e deslizar -Figuras congruentes	Informação Informação/ Orientação guiada	
<i>O rodar</i>	-Movimento rodar	Orientação guiada	
<i>O rodar e o geoplano</i>	-Rotação	Explicitação	
<i>Ventoinhas</i> (t. A) e <i>As ventoinhas</i> (t. B)	- Rotação	Orientação livre	Explicitação

Sessões	Conteúdos geométricos	Fases de aprendizagem	
		Turma A	Turma B
<i>A simetria rotacional</i>	-Rotação -Simetria rotacional	Orientação livre Informação/ Orientação guiada	
<i>A reflexão</i>	-Simetria rotacional -Simetria reflexional -Reflexão	Explicitação Orientação guiada Orientação guiada	
<i>O virar</i>	-Simetria rotacional -Simetria reflexional -Movimento virar	Explicitação Explicitação Orientação guiada	
<i>O papagaio (t. A) e Simetrias</i>	-Simetria rotacional -Simetria reflexional -Reflexão	Explicitação e Orientação livre	Orientação livre Orientação livre Explicitação
<i>O deslizar</i>	-Translação	Orientação guiada/ Explicitação	
<i>O jogo da transformação</i>	-Integrar rodar, virar e deslizar	Orientação livre	
<i>Frisos (t. A) e Pavimentar</i>	-Integrar rodar, virar e deslizar -Simetria	Orientação livre	Orientação livre Orientação livre
<i>A tenda (t. A) e o jogo com tetraminós</i>	-Integrar rodar, virar e deslizar -Simetria	Orientação livre Orientação livre	Orientação livre
<i>A flor</i>	-Integrar rodar, virar e deslizar -Simetria	Orientação livre Orientação livre	

3.5. Recolha e análise de dados

Esta vertente metodológica está fundamentalmente relacionada com a prossecução do primeiro objectivo do estudo de elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial que será discutido no capítulo IV e também com o segundo objectivo do estudo que quer reconhecer o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos.

3.5.1. Recolha

Foram feitas análises e interpretações sobre transcrições de registos vídeos à luz do modelo teórico inicial elaborado sobre o pensamento visual-espacial. Foram transcritas as respostas individuais dadas por doze alunos, sete da turma A e cinco da turma B a tarefas geométricas administradas pela investigadora (a interagir com um aluno de cada vez) antes e depois da experimentação do ambiente de ensino e não em situação de aula bem como as execuções feitas por dois pares de alunos da turma A, de duas tarefas geométricas (*espinha* e *flor*) usando o micromundo Tarta em actividades na aula. As duas tarefas *espinha* e *flor* foram as escolhidas porque os alunos para as resolverem podiam usar os três movimentos. Ainda a tarefa *espinha* era primeira tarefa onde os alunos antes de a iniciarem já tinham experimentado todos os comandos do micromundo Tarta, relativamente a movimentos. A tarefa *flor* podia envolver o uso de todos os comandos do TARTA e era a tarefa mais complexa do ambiente de ensino. Nas transcrições das execuções das duas tarefas usando o micromundo Tarta, as figuras que aparecem não são as imagens directamente feitas no ecrã pelos alunos, mas representações dessas, construídas pela investigadora depois de ver aquelas imagens videogravadas. Isto pode implicar ligeiras distorções nessas imagens, as quais só serão referidas, se forem importantes para o estudo.

Para determinar os níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico para movimentos dos alunos, os dados utilizados foram as transcrições de registos vídeo das respostas individuais dos doze alunos às tarefas geométricas antes e depois da experimentação dos ambientes de ensino.

3.5.2. Refinação e avaliação do modelo teórico

A investigadora, instrumento principal de recolha de dados deste estudo, estava então munida: de dados de cinco fontes vídeo-gravados e transcritos e dum modelo teórico inicial para compreender o pensamento visual-espacial, por ela desenvolvido. Com base nos dados a investigadora considerou importante a constituição de categorias a estudar. Os dados foram então organizados em episódios os quais foram distribuídos pelas categorias referidas a fim de as caracterizar. Aqueles episódios foram então descritos, respeitando a forma como foram transcritos e tentando não deixar escapar nenhum pormenor. Simultaneamente os episódios foram também analisados e interpretados do ponto de vista da investigadora e isto foi depois escrito de forma entrançada, procurando estruturar o modelo teórico elaborado. A informação contida naqueles episódios foi também por vezes inter-relacionada de forma a tentar perceber

alguma questão importante. Confirmações das conjecturas teóricas embutidas no modelo teórico inicial, conjecturas iniciais revistas ou refutadas, inferências, ou descoberta de relações relevantes para o pensamento visual-espacial foram percebidas após as análises e interpretações. Uma versão refinada do modelo de pensamento visual-espacial foi então apresentada. Pretendeu-se que esta metodologia usada para estruturar ou desenvolver modelo teórico fosse próxima do método de comparação constante, o qual envolve os seguintes passos: recolha de dados; procura de situações-chave, acontecimentos recorrentes ou actividades com base nos dados que constituam categorias a estudar; recolha de dados que proporcionem muitos incidentes das categorias em estudo, procurando a diversidade das dimensões subjacentes às categorias; escrita sobre as categorias que se está a explorar, tentando descrever e justificar todos os incidentes; trabalho com os dados e com o modelo emergente para descobrir processos sociais e relações básicas; amostragem, codificação e escrita, à medida que a análise se concentra nas categorias principais (Bogdan e Biklen, 1994, pp. 103-104).

No sentido da avaliação do modelo teórico construído, fomos ainda submetê-lo a um conjunto de critérios de avaliação definidos por Schoenfeld (2002). Uma lista de critérios pode ser então usada para avaliar modelos e teorias (e numa forma mais geral, qualquer trabalho teórico ou empírico) em educação matemática:

O primeiro critério definido por Schoenfeld é o *poder descritivo* designa a capacidade de as teorias ou modelos, capturarem “aquilo que acontece” e isso de modo que pareça fiel aos fenómenos que pretendem descrever. (Correspondem os elementos da teoria a coisas que parecem razoáveis? Está a faltar alguma coisa?)

O segundo critério é o *poder interpretativo* designa o grau de explicação fornecida sobre como e porquê as coisas trabalham. (Dizer em termos razoavelmente precisos, o que os objectos no modelo são, como eles se relacionam e porque é que algumas coisas são possíveis e outras não).

O *campo de acção* é o terceiro critério e denota a gama de fenómenos “abrangidos” pela teoria. (Especifica o que a teoria, modelo, realmente faz e não faz.)

O quarto critério é o *poder preditivo* está relacionado com formas de restrições ou afirmações do que é possível ou impossível. (Que espécie de predições o modelo proposto apoia?)

O quinto critério é *rigor e especificidade* que está ligado com a construção de uma teoria ou modelo onde a especificação de um conjunto de objectos e relações entre eles estão envolvidos. (Quão bem definidos são os termos? Quão bem definidas são as relações entre eles?)

A *falsificabilidade* é o sexto critério que está ligado com a necessidade de construir afirmações não tautológicas ou previsões cuja precisão pode ser empiricamente testada.

A *replicabilidade*, a *generabilidade* e a *credibilidade* são questões profundamente relacionadas com as questões de rigor e especificidade já falada. A capacidade de replicar um estudo ou de empregar um constructo teórico da forma como foi trabalhado por um autor depende de quanto o trabalho original foi suficientemente bem definido por forma que outros investigadores, seguindo as pegadas da autora, possam empregar métodos ou perspectivas muito próximas das originais. Dada a variabilidade de pessoas e contextos a noção estrita de replicabilidade é raramente apropriada em pesquisa educacional. Uma fonte de credibilidade é a existência de múltiplos olhos para os mesmos dados.

As *múltiplas linhas de evidência, triângulação*. é um critério que consiste em procurar muitas fontes de informação tanto quanto possível sobre o fenómeno em questão e ver se elas descrevem tanto quanto possível uma “mensagem” consistente.

3.5.3. Níveis de desenvolvimento geométrico

O segundo objectivo desta investigação estava também relacionado com o determinar os níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico para movimentos elementares evidenciados pelos alunos. A descrição dos níveis de pensamento de Van Hiele foi baseada unicamente em figuras planas. Para determinarmos os níveis de pensamento geométrico evidenciados pelos alunos no nosso estudo, fomos usar os descritores correspondentes dos níveis de Van Hiele para movimentos elementares desenvolvidos por Clements e Battista. Eles só referiram níveis de pensamento de zero a três para movimentos elementares, porque o estudo de Clements and Battista estava restrito a crianças da escola elementar, e não era esperado que uma execução de um nível quatro de Van Hiele, fosse atingida por um estudante que não tivesse completado o secundário em Geometria (Johnson-Gentile, 1990).

Foi usada uma codificação relativa aos descritores dos níveis de pensamento para movimentos baseada na codificação de Lewellen (1992) que a seguir descrevemos. As respostas às tarefas foram codificadas de forma a dar pontuações separadas aos movimentos, deslizar, virar e rodar.

Deslizar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. “Move isto sobre aqui”, “fá-lo baixar”. Impreciso.

- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. “Move isto para a direita 5 espaços, para baixo 2 espaços.
- 3 - Usa o termo “desliza” mas não especifica a quantidade ou direcção. “desliza para aqui”; “desliza-o diagonalmente”.
- 4 - Usa o termo “desliza” mas não especifica ambas, a quantidade e a direcção. “desliza para a direita”; “desliza-o três pontos”.
- 5 - Usa o termo “desliza” mas não especifica ambas, a quantidade e a direcção, porque uma delas é especificada, usando imagens cinestésicas.
- 6 - Usa o termo “desliza” e especifica tanto, a quantidade e a direcção do deslize, mas comete algum erro na especificação.
- 7 - Usa o termo “desliza” e especifica correctamente tanto, a quantidade e a direcção do deslize.
- 8 - Outra.

Virar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. “Volta isto”. Impreciso.
- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. “Volta isto, conservando-o no mesmo lugar”; “volta-o com esta linha”
- 3 - Usa o termo “virar” mas não especifica unidades ou linha de viragem. “Vira-o sobre”.
- 4 - Usa o termo “virar” mas não especifica a linha de viragem. “Vira-o sobre, conservando-o no mesmo lugar”; “Vira-o conservando a ponta no cimo”. Tenta ser preciso.
- 5 - Usa o termo “virar” mas não especifica a linha de viragem com precisão. “Vira-o sobre uma linha vertical”. Sabe que é necessária uma linha de viragem.
- 6 - Usa o termo “virar” e especifica a linha de viragem, mas comete um erro na especificação, ou indica a linha usando imagens cinestésicas.
- 7 - Usa o termo “virar” e especifica correctamente a linha de viragem.
- 8 - Outra.

Rodar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. “Move-o como isto”; “Vai à volta”. Impreciso.

- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. "Move-o à volta de forma que a ponta está no cimo"; "anda 90° à volta deste ponto".
- 3 - Usa o termo "rodar" mas não especifica centro, direcção ou quantidade. "roda-o à volta".
- 4 - Usa o termo "rodar", e tem em conta um dos três parâmetros: centro, quantidade e direcção. "Roda 90°, mas nenhuma direcção ou centro de rotação" ou "roda em torno deste ponto", com nenhuma quantidade ou direcção.
- 5 - Usa o termo "rodar", e tem em conta dois dos três parâmetros. "Roda para a direita 90°", mas nada sobre o centro de rotação ou "roda para a esquerda à volta deste ponto" sem qualquer direcção. Tenta ser preciso. Usa o termo "rodar", e tem em conta um dos três parâmetros, mas está a indicar o outro usando imagens cinestésicas.
- 6 - Usa o termo "rodar", e tem em conta os três parâmetros: centro, quantidade e direcção, mas comete um erro nas especificações. Usa o termo "rodar", e tem em conta dois dos três parâmetros, mas está a indicar o outro usando imagens cinestésicas.
- 7 - Usa o termo "rodar", e correctamente especifica o centro de rotação, a quantidade e a direcção da rotação.
- 8 - Outra.

Os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares desenvolvidos por Clements e Battista são:

Nível 0: *Pré-reconhecimento*

Neste nível os movimentos específicos não são reconhecidos. Respostas tais como "eu não sei," "Eu não posso fazer isso," ou conjecturas óbvias são possíveis.

Nível 1: *Visual*

Neste nível os estudantes podem reconhecer os movimentos (por exemplo deslizar, virar, rodar), mas podem não usar aqueles termos. Podem ainda distinguir aqueles movimentos um dos outros. Há pouco esforço em ser consistente ou preciso. Respostas podem incluir: "move-o para a direita e depois para baixo. Agora volta-o de cima para baixo" (virar). Eles podem reconhecer que os dois triângulos não se ajustarão sem um virar, mas podem não saber como fazer isso, possivelmente mesmo pensando que voltar de cima para baixo não é admissível. Os estudantes podem usar os termos deslizar, virar e rodar mas não serem precisos nas

especificações desses movimentos falhando identificar centros de rotação e linhas de reflexão. Por exemplo, um estudante pode dizer, “desliza-o para cima e vira-o.

Nível 2: *Descritivo/Analítico*

A este nível os estudantes tentam ser consistentes e precisos quando descrevem os movimentos. Eles provavelmente usam os termos “deslizar,” “virar,” e “rodar” e pensam nos movimentos em termos das suas propriedades. Por exemplo ao olhar para um rodar, eles podiam mencionar as suas três propriedades (o centro de rotação, a direcção de rotação e a quantidade a rodar), dizendo, “roda o triângulo de 90° para a direita do centro de rotação que é o vértice do ângulo recto do triângulo”. Uma outra resposta possível pode ser “desliza-o para a direita três e para baixo seis,” especificando tanto a direcção como a quantidade a deslizar. E explicitamente especificavam a única componente de virar (a linha de viragem).

Nível 3: *Abstracto/relacional*

A este nível, os estudantes vêem as relações entre os próprios movimentos e as suas propriedades. Eles compreendem a equivalência de movimentos e podem combinar movimentos para condensá-los num número mínimo de movimentos. Eles podem substituir um deslize e uma rotação por uma só rotação, ou substituir dois virar por um deslizar ou um rodar.

3.5.4. A investigadora

A investigadora assumiu vários papéis neste estudo, desde a construção do modelo teórico, a concepção e administração de tarefas geométricas, a orientação do programa de sensibilização das professoras, a concepção do micromundo Tarta e do ambiente Tarta, desenvolvimento das sessões de ensino e a ser observadora participante aquando da implementação dos ambientes de ensino. Vou agora destacar este último papel de observadora participante, onde a investigadora teve oportunidade de perceber a realidade do ponto de vista de alguém que tenta fazer parte do grupo na aula e por outro lado tenta também considerar-se uma intrusa no grupo, mantendo uma distância, pelo menos intelectual, das actividades que observa.

A observação participante é uma estratégia que dá acesso directo à actividade desenvolvida pelos alunos, “é um meio de determinar como as pessoas vêm e se comportam dentro do seu mundo, capacita o investigador a verificar o que os indivíduos estão a fazer o que eles ou o investigador pensam que estão a fazer” (Goetz e LeCompte, 1984, p. 110).

Os papéis desempenhados pela investigadora na aula variaram entre participar nas actividades das turmas, quer apoiando as professoras como ajudante, quer eventualmente orientando mesmo as sessões (por exemplo nas sessões com o micromundo Tarta, na turma A), verificar se e como a forma de implementar os ambientes de ensino foi diferente da estrutura por ela desenhada, observar o modo como as pessoas se comportavam e interagiam umas com as outras.

A investigadora sempre que possível, escrevia notas de campo no fim de cada sessão ou no fim dum encontro de sensibilização com as professoras, para registar o que tinha sido observado e sentido. No mesmo dia, e ao fim desse dia, em casa, essas notas de campo eram completadas fundamentalmente com ajuda da memória. Muitas das sessões de ensino foram apoiadas por um audio-gravador, mas só a partir do momento que foi sentido que o comportamento das professoras e alunos já não era perturbado pela presença do aparelho. Também o audio-gravador foi usado sempre que a investigadora tinha de intervir na aula, fundamentalmente como ajudante das professoras. Assim, as fontes de reflexão e de memória da investigadora foram então notas de campo e registos audio das sessões ensino.

3.6. Limitações do estudo

Limitações a este estudo qualitativo estão ligadas com a sua generalidade e credibilidade. Houve diversos factores condicionantes. O primeiro foi o pequeno tamanho da amostra, o segundo factor condicionante é o intervalo de idade dos alunos a que o estudo ficou restrito. Também o pequeno número de contextos investigados bem como o domínio do contexto investigado são factores limitativos. Devemos ainda juntar as restrições inerentes ao micromundo Tarta e aos ambientes de ensino. O micromundo Tarta foi criado na linguagem de programação Logo e com outros programas de computador resultaria provavelmente outras situações para o estudo. Ainda os ambientes de ensino com as suas tarefas, sessões e respectivas implementações condicionam a vivência e o desenvolvimento do pensamento visual-espacial.

Capítulo IV

Modos de pensamento visual-espacial e processos mentais

Este capítulo pretende satisfazer parcialmente o objectivo do estudo relacionado com elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial para a educação em matemática. Vai ser feita a descrição de um modelo teórico inicial onde são distinguidos três modos de pensamento visual-espacial, exemplificadas ligações entre esses modos de pensamento visual-espacial, apresentadas as influências marcantes na construção do modelo teórico inicial, colocadas questões específicas, baseadas nos critérios de Alan Schoenfeld sobre as quais este modelo vai ser testado, e apontadas as suas limitações. Este modelo inicial será sujeito a um confronto com os dados (capítulo V) do qual emergirá uma versão final (capítulo VII).

Uma componente do pensamento matemático é o pensamento geométrico que envolve a manipulação mental de imagens. A Geometria recorre a conteúdos mentais, à imagética, em processos dinâmicos da mente. Em campos algébricos, a imagética também pode estar presente: a visualização pode ser um veículo para a resolução de problemas significativos em álgebra (Yerushalmy, Shternberg e Gilead, 1999); os processos de raciocínio usados tanto na visualização espacial como no completar de padrões ajudam os estudantes a chegar às generalizações e a ligar representações (Warren, 2000). Mas não é apenas em campos geométricos e algébricos que a imagética está presente. Nos primeiros estádios do desenvolvimento da teoria das funções, limites, continuidade, a visualização é uma fonte fundamental de ideias. Na pesquisa matemática, a prova é o último estádio do processo, mas

antes de haver prova, deve existir uma ideia de que teoremas vale a pena provar ou de que teoremas podiam ser verdadeiros. Este estágio exploratório do pensamento matemático beneficia da construção de uma figura de relações e tal figura pode beneficiar de uma visualização. Cauchy por exemplo, teve de visualizar a situação para uma curva mais geral no plano complexo para dar o seu famoso teorema na forma de uma curva fechada, sustentando que o integral de uma função analítica em torno de uma curva fechada que não envolve nenhuma singularidade é zero. Métodos gráficos foram muitas vezes usados para provar teoremas analíticos (por exemplo o teorema do valor intermédio). A análise assenta num reportório de imagens visuais simples que são úteis para reter e meios eficazes de integrar o conhecimento, na compreensão de conceitos e princípios ou como um guia na resolução de problemas, por exemplo, imagens associadas com conceitos (o integral definido), com teoremas (teorema do valor médio) (Tallb, 1991; Zimmermann, 1991).

As componentes do pensamento matemático, quer ele incida ou não sobre geometria, envolvem por vezes um pensar que é simultaneamente visual e espacial. O pensar é visual, porque ocorre um fluxo contínuo de imagens mentais visuais. Mas o pensamento é também espacial pois pode envolver uma estrutura espacial percebida visualmente que incorpora descrições implícitas dos elementos das imagens e relações espaciais entre esses elementos, isto é, pode fazer emergir as regras dessa estrutura espacial. Este pensamento espacial é baseado no sistema perceptual humano comum e em elementos universais de ambientes humanos, tais como a gravidade e a permanência dos objectos. No entanto os dois “pensares”, o visual e o espacial, ocorrem muitas vezes em simultâneo.

Faz então sentido ressaltar o pensamento cujas criações visuais-espaciais revelam um pensar que combina o visual com o espacial ou seja, onde a informação visual-espacial se interliga e é esse pensar, que intervém no estudo da matemática, que vou denominar por *pensamento visual-espacial*. Não é este o termo usual usado na literatura, sendo antes evidenciados termos como pensamento visual, raciocínio visual, e raciocínio espacial, pensamento espacial. O primeiro, o pensamento visual, aparece muitas vezes a par do termo “visualização” (Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Sénechal, 1991) que se foca na percepção e manipulação de imagens visuais, e tem diferentes conotações consoantes esteja ligado à educação matemática, à investigação científica, ou à psicologia. Os termos, pensamento espacial ou raciocínio espacial surgem com frequência ligados a capacidades espaciais (Clausen-May e Smith, 1998; Meissner e Pinkernell, 2000).

O pensamento visual-espacial está na base de criações significativas da mente humana, é fulcral para a educação em geometria a todos os níveis e, da literatura lida, induzo que conceitos, operações e processos mentais ou capacidades espaciais envolvidos nesse

mesmo pensamento ainda permanecem sob uma certa obscuridade. Senti a necessidade de olhar e procurar compreender o pensamento visual-espacial de uma perspectiva que a seguir irei expor, procurando conhecer como ele se pode desenvolver e tentando ao mesmo tempo explicar dificuldades encontradas no pensamento visual-espacial usado pelos alunos.

Começo por fixar alguma terminologia que será posteriormente discutida no decorrer deste capítulo. Assim vou usar o termo *pensamento visual-espacial* no sentido abrangente como R. N. Shepard o entendeu: “modo de pensamento essencialmente não verbal, envolvendo representações internas que podem ser melhor descritas como imagens de uma natureza muitas vezes visual e principalmente espacial” (citado em Clements, 1981, p. 2). O significado que vai ser dado ao termo *imagem visual* será o de Norma Presmeg: “esquema mental que exhibe informação visual ou espacial” (1986a, p. 297), que inclui imagens concretas e formas mais abstractas. Segundo Presmeg esta definição de imagem visual inclui imagens que atingem a vivacidade e claridade duma figura, mas também toma deliberadamente extensão suficiente para incluir tipos de imagens que exibem forma, padrão ou configuração. A definição de *imagética* que vai ser considerada neste estudo é a de Solano e Presmeg (1995, p. 67): uma colecção de uma ou mais imagens mentais.

Para a prossecução deste estudo, certas orientações teóricas em cognição vão ser adoptadas como referência. As perspectivas relacionadas com a ocorrência do corpóreo na cognição e com a importância dos factores sócio-culturais na construção do conhecimento serão referências para este estudo. É que o pensamento visual-espacial é o produto da actividade cerebral e tem um suporte biológico. O cérebro é um órgão interactivo e adaptativo às situações e funciona bem ligado ao mundo e ao corpo (Caldas, 2004).

Estudos sobre o pensamento espacial e o pensamento visual de cegos têm sido feitos (Marmor e Zaback, 1976; Millar, 1976), contudo, está fora do âmbito desta investigação compreender o pensamento visual-espacial de indivíduos cegos ou o pensamento visual-espacial de indivíduos que tendo sido invisuais recuperam entretanto a visão.

Vou então começar pela apresentação de um modelo inicial para o pensamento visual-espacial, destacando três modos de pensamento visual-espacial: o pensamento visual-espacial resultante da percepção, o resultante da manipulação mental de imagens e construção de relações entre imagens e o que está ligado à exteriorização do pensamento.

4.1. Modelo teórico inicial

A primeira etapa deste trabalho consistiu no desenvolvimento dum modelo para o pensamento visual-espacial, onde se distinguem três modos diferentes de pensar: o

pensamento visual-espacial resultante da percepção, modo PVP; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e construção de relações entre imagens, modo PVMM/PVR; o pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão/comunicação e representação, isto é, à exteriorização do pensamento, modo PVE. O Quadro 4.1 apresenta, de forma resumida, as definições destes três modos de pensamento.

Quadro 4.1. Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições.

Modos de pensamento visual-espacial	Definição de cada modo de pensamento visual-espacial
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP).	Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial e de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens (PVMM/PVR).	Operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformação, comparação de ideias, conceitos e modelos.
Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE).	Operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Seguidamente vou discutir mais em pormenor cada um destes modos de pensamento e para cada um deles caracterizar os processos mentais associados.

4.1.1. O pensamento visual-espacial resultante da percepção

O pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP) é o modo mais próximo das sensações, isto é, dos impulsos eléctricos que chegam ao cérebro. É um modo cujas operações intelectuais incidem sobre material perceptivo-sensorial e de memória. Seguindo Rudolf Arnheim (1969) a percepção é um processo cognitivo desencadeado por estímulos, e que é executado consciente ou inconscientemente, voluntária ou automaticamente, quer por centros mais elevados do cérebro quer por meros reflexos. A percepção é aqui entendida como um processo activo, não envolvendo apenas um mero registo do material estímulo que não se esgota na informação recebida através dos sentidos. O material cognitivo torna-se não perceptual no momento em que o pensamento transforma as percepções em concepções.

Vou adoptar a ideia que o pensamento visual-espacial é apoiado por sistemas cerebrais tais como os que foram identificados por Damásio (1994) onde, metaforicamente falando,

existe debaixo da mente consciente, um subterrâneo com diversos níveis. Um desses níveis é composto por imagens inconscientes. Um outro nível é composto por padrões neurais e relações entre padrões neurais que subtendem todas as imagens quer estas eventualmente se tornem conscientes ou não. Um outro nível ainda, está relacionado com a maquinaria neural necessária à manutenção de arquivos de padrões neurais na memória, o tipo de maquinaria que abrange disposições implícitas inatas e adquiridas.

O pensamento visual-espacial resultante da percepção é construído pelo sujeito partindo de estímulos sensoriais e utilizando a informação adquirida com a experiência. Este modo de pensamento envolve experiências de concentração mental, de controlo e experiências de observação. As experiências de observação envolvem percepção e interpretação, dependem da experiência passada, da memória, da motivação, das emoções, da atenção, de mecanismos neuronais individuais, do conhecimento prévio, das verbalizações, de aspectos específicos da nossa cultura e portanto o que vemos depende do que trazemos à situação. Os factores socioculturais dos quais a percepção visual depende não são menos importantes que os factores individuais que condicionam a percepção, são mesmo sentidos a ponto de condicionar o modo de ver de todos os membros de uma mesma cultura. O ocidental, por exemplo, ao contrário do aborígine, consegue ver um mundo tridimensional em representações pictóricas bidimensionais, porque é capaz de descodificar a “perspectiva” (Calado, 1994). Um desenho e um objecto que ele representa pode gerar imagens diferentes para pessoas diferentes, dependendo da suas experiências, maturidade e cultura; factores sociais e culturais tais como a linguagem, também jogam um papel importante no desenvolvimento dos diferentes níveis ou dimensões da imagem (Sesay, 1993).

O modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção usa frequentemente dois tipos de imagens denominadas concretas e de memória, seguindo a classificação de Presmeg (Brown e Presmeg, 1993). *Imagem concreta* pode ser pensada como “uma figura na mente”, mas que pode não ser a mesma para todos; *imagens de memória* são as produzidas ao recriar imagens da experiência. Neste modo de pensamento PVP, são também incluídas as imagens de memória que são representações memoriais de informações visuais, ligadas à percepção de movimento, por exemplo, as imagens criadas quando visualmente se verifica a aproximação de veículos, antes de atravessar a rua (Blake, Cepeda e Hiris, 1997). Os processos de pensamento envolvidos neste modo de pensamento visual-espacial estão sintetizados no Quadro 4.2.

Quadro 4.2. Processos mentais do modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção.

Modo de pensamento visual-espacial	Processos mentais associados
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP).	<ul style="list-style-type: none"> - Intuições primárias, inferências intuitivas. - Construção visual. - Re-apresentação e avaliação de imagens. - Reconhecimentos visuais. - Identificação de objectos, modelos, formação de um “gestalt”, apreensão global de uma configuração geométrica. - Abstracção perceptual e abstracção ligada ao reconhecimento. - Geração de conceitos.

Os primeiros processos mentais que considero associados ao modo PVP são as *intuições*. Usando as ideias e a terminologia de Fischbein (1987) que discuti no capítulo II, são aqui incluídas as *intuições primárias*, aquisições cognitivas que se desenvolvem nos seres humanos numa forma natural, antes e independente do ensino sistemático. Elas estão ligadas, por exemplo, à representatividade do espaço (relacionadas também com os movimentos do nosso corpo e suas partes), a imagens como modelos. Imagens podem injectar propriedades e relações no processo de construção de conceitos, que não pertencem propriamente à estrutura conceptual (pontos como manchas e linhas como tiras) podendo mesmo perturbar o raciocínio. Por exemplo, a aceitação de uma *inferência intuitiva* está patente quando uma criança vê uma bola, corre atrás dela em concordância com a posição da bola e adapta as suas reacções ao movimento da bola. A criança não só *vê* a bola a mover-se, mas também *espera* que continue a mover-se, que continue a existir, que preserve a sua forma e outras propriedades.

A *construção visual* é um processo mental presente no modo PVP e pode ser ilustrada, por exemplo, quando se “vê” alterações de distância ou de tamanho em ilusões ópticas (ainda que a mente possa saber que a percepção é ilusória), quando nos apercebemos das flutuações figura-fundo em desenhos ambíguos. Olivier Sacks diz que a construção visual dum indivíduo pode ser avaliada de forma objectiva e reproduzível com o “ver” ou “não ver” ilusões ópticas. A incapacidade de um seu paciente que tinha sido invisual até há pouco de “ver” efeitos ópticos ilustra, diz Sacks, que as faculdades cerebrais de construção visual daquele paciente eram rudimentares em resultado de quase total ausência de experiências visuais (Sacks, 1996). No modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, a capacidade de construção

visual parece poder envolver outras capacidades como a percepção da figura fundo e a memória visual.

O processo mental de *avaliar uma imagem* consiste no apresentar novamente a imagem e este acto de re-apresentar, evocar (acto mental que traz uma experiência anterior à consciência do indivíduo) é complexo e subtil (Damásio, 1994; Wheatley e Brown, 1994; Wheatley, 1998). Estas imagens re-apresentadas não são imutáveis, pois podem sofrer mudanças com o tempo. Em muitos casos a imagem representada pode ter sido modificada ou podia ser um protótipo o qual é transformado segundo as exigências dos contextos. A natureza da representação é grandemente influenciada pelas intenções do indivíduo e em muitos casos a imagem re-apresentada pode tornar-se mais elaborada. A avaliação de uma imagem resulta do confronto entre a imagem mental e a imagem real.

A informação que chega até nós através dos olhos está envolvida na percepção visual, a qual segundo Gal e Linchevski (2002) envolve duas fases, a fase de *processamento de informação visual* que consiste no registar de informação sensorial e a fase do *reconhecimento do padrão visual* que envolve interpretar formas e objectos. Gal e Linchevski dizem ainda que na primeira fase da percepção visual, formas e objectos são extraídos da cena visual. Para formar o objecto, precisamos de saber “o que é que está relacionado com o quê”. Os objectos organizam-se em grupos de acordo com o conjunto de princípios gestalt de organização: princípio de proximidade (os elementos juntos tendem a organizar-se em unidades); princípio de semelhança (objectos que se assemelham tendem a ser agrupados juntos); princípio da continuidade (percepcionamos melhor linhas que mudam continuamente do que linhas com mudanças bruscas); princípio do fecho e da boa forma (tendemos a ver formas fechadas em vez de abertas e com uma forma regular em vez de irregular) (Wertheimer, 1938). Os gestaltistas também sugerem a lei do destino comum, segundo a qual os elementos visuais que parecem mover-se e tendem a agrupar-se. A maior parte das leis formuladas pela corrente gestaltista foram derivadas do estudo de figuras bidimensionais estáticas (Eysenck e Keane, 2001).

Na segunda fase de percepção visual proposta por Gal e Linchevski, os objectos e formas são reconhecidos. O reconhecimento é o resultado da análise das componentes na qual o objecto foi segmentado em sub-objectos, como resultado do prévio processamento visual da primeira fase. Cada sub-objecto é classificado e quando as peças dos quais o objecto é composto e a sua configuração são determinadas, o objecto é reconhecido como um padrão composto destas peças (Gal e Linchevski, 2002). Assim, a designação dos processos cognitivos no Quadro 4.2, *reconhecimentos visuais, identificação de objectos, modelos, formação de um gestalt, apreensão global de uma configuração geométrica* seguem as ideias

acima expressas por Gal e Linchevski (2002) onde reconhecimentos visuais pertence à segunda fase da percepção visual enquanto os restantes estão incluídos na primeira fase da percepção visual.

Embora a abstracção assuma formas mais desenvolvidas nos outros modos de pensamento, existem aspectos de *abstracção*, que podem ser valorizados no modo PVP. Por exemplo: um aspecto básico, *perceptual*, aquele onde a abstracção isola algo da experiência ou da cena visual, identificando-o e compreendendo-o; um outro aspecto está ligado ao *reconhecimento* de uma estrutura familiar inerente a uma dada situação. A *geração de conceitos* é feita quando o reconhecimento de relações e ideias emergem. São fundamentalmente usadas neste modo de pensamento visual-espacial, imagens concretas, imagens de memória e intuições primárias e há grande probabilidade de as imagens dos conceitos a emergir poderem ser incompletas ou incorrectas.

4.1.2. O pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens

O modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens (PVMM/PVR) vai abranger diferentes níveis de processamento de imagem, principalmente o prever o resultado da imagem a transformar e o visionar do percurso dessa mesma transformação. Discutirei em conjunto o modo de pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens (PVR) e o modo de pensamento visual-espacial (PVMM) resultante da transformação mental de imagens visuais, que envolve a execução de manipulações mentais, pela grande similitude que antevejo entre os processos mentais que lhes estão subjacentes. Referir-me-ei pois apenas ao modo de pensamento PVMM/PVR, não cuidando da distinção entre eles.

O modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou construção de relações entre imagens é um fluxo de imagens que foram previstas (pré-vistas) ou transformadas num espaço mental, o espaço mental das transformações. Neste espaço, onde este modo de pensamento se desenvolve, as imagens são mentalmente previstas ou antecipadas, transformadas e comparadas, e ainda planeamentos mentais, construções de relações entre imagens e factos, propriedades sobre representações mentais podem também vir a ser desencadeados por vezes como iluminações súbitas. Incluirei neste modo de pensamento a *imagética dinâmica* e *imagética padrão* propostas por Presmeg (Brown e Presmeg, 1993). A *imagética dinâmica* envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta. *Imagética padrão* é um tipo de imagética em que pormenores

concretos são desprezados e relações puras são apresentadas num esquema visual-espacial. Johnson (1987) usou o termo *esquema imagético* para descrever uma construção muito semelhante à imagética padrão de Presmeg (Presmeg, 1992).

“Esquemas imagéticos, não são imagens concretas ricas nem figuras mentais. Eles são estruturas que organizam as nossas representações mentais a um nível mais geral e abstracto do que aquele em que formamos imagens mentais particulares” (Johnson, 1987, pp. 23-24).

Este tipo de imagética padrão parece ter sido usado por Einstein que, quando se refere ao seu pensamento científico, menciona “certos sinais e imagens mais ou menos claras que podem ser ‘voluntariamente’ reproduzidas e combinadas” (Brown e Presmeg, 1993, citando Hadamard, 1945, p. 142). Einstein usou tal tipo de imagética para executar transformações mentais que forneceram a base para grandes mudanças em compreensão em física e estes processos (procedimentos) permitiram-lhe ir para além do âmbito da experiência perceptual. Owens (sem data), usando o quadro conceptual de Presmeg, mostrou uma criança do pré-primário esticando um quadrado usando aparas de pão para obter um rectângulo “esguio”. Esta criança usou também imagética dinâmica ao prever (mentalmente) o resultado da transformação de um quadrado num rectângulo antes de executar (fisicamente) essa mesma transformação. Segundo Owens (1994) a imagética dinâmica permitiu que ela relacionasse uma imagem para o conceito de quadrado com outra imagem para o conceito de rectângulo. Uma outra criança, por exemplo, construiu o triângulo de tamanho médio, com os pequenos triângulos do puzzle tangram (Owens, sem data) (ver figura 4.1). A criança também usou imagética padrão porque consegue ver uma certa estrutura (triângulo) como composição de outras estruturas.

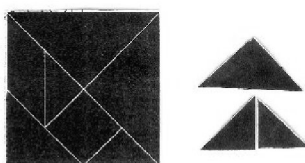


Fig. 4.1. Composição do triângulo médio do tangram.

O modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou construção de relações entre imagens, incorpora a parte *do raciocínio transformativo* referente à previsão e execução mental de transformações sobre objectos, postulado por Simon (1996). Simon considera, além dos raciocínios indutivo e dedutivo usados para a compreensão e validação de ideias matemáticas, um terceiro tipo de raciocínio, o raciocínio transformativo que é definido como

“uma execução física ou mental de uma operação ou conjunto de operações sobre um objecto ou conjunto de objectos que permite que sejam visionadas as transformações que esses objectos sofrem e o conjunto dos resultados dessas operações. Central para o raciocínio transformativo é a capacidade de considerar, não um estado estático, mas um processo dinâmico pelo qual são gerados um novo estado ou um contínuo de estados” (Simon 1996, p. 201).

Este raciocínio transformativo é apoiado por imagens reprodutoras de transformação e por imagens antecipadoras, termos usados por Piaget e Inhelder e retomados aqui por Simon. *Imagens reprodutoras* são as que evocam objectos ou acontecimentos já conhecidos e *imagens antecipadoras* são as que representam por imaginação figural acontecimentos não percebidos anteriormente, quer se tratasse de movimentos ou transformações ou dos seus fins ou resultados (Piaget e Inhelder, 1977). Piaget e Inhelder ainda discriminaram as imagens reprodutoras em estáticas, cinéticas e de transformação.

O raciocínio transformativo não está restrito ao imaginar de transformações. Uma execução física pode ser usada para examinar os resultados de uma transformação. Por exemplo, um estudante que está a explorar a validade da frase “se conheces o perímetro dum rectângulo, conheces a sua área”, podia trabalhar com um pedaço de corda observando o que acontece à área quando torna o rectângulo mais comprido e mais fino. Mas para que o estudante pudesse pensar em modelar o seu problema usando o pedaço da corda era necessário a antecipação mental, isto é, ele sabia, antes de manipular a corda, como modelaria o rectângulo e como iria usar a corda para observar os resultados da operação (Simon, 1996). Um outro exemplo desse raciocínio é quando uma criança usando miolo de pão é capaz de imaginar e construir a letra M e visualizar também a mudança para construir um W, usando agora a simetria horizontal, de uma forma dinâmica (Owens, sem data). As complexidades dos exemplos de raciocínio transformativo variam desde os relativamente triviais aos extremamente poderosos.

O que há de comum entre o raciocínio transformativo prognosticado por Simon e o modo PVMM/PVR é o facto de em ambos se poderem fazer operações mentais ou transformações sobre objectos, as quais podem ser mentalmente visionadas, bem como os seus resultados. Usando a terminologia de Piaget, diríamos que nesta forma de raciocinar podem caber pensamentos muitos complexos e a imagética pode atingir estádios superiores. Por exemplo, géometras, recorrem a imagens antecipadoras muito elaboradas para “ver” em espaços de dimensão superior ou em espaços com estruturas matemáticas muito afastadas do senso comum.

Mas o modo de pensamento PVMM/PVR não se fica pelo que foi dito anteriormente relativo à sua comunhão com o raciocínio transformativo, onde imagens dinâmicas estão

presentes. Este envolve ainda outras formas como: o planear, o construir de relações entre imagens ou modelos ou mesmo gerar novas representações mentais, sendo esta última uma componente chave para a criatividade (Flowers e Garbin, 1989). Neste modo de pensamento, a imagética padrão, como foi anteriormente definida, contribui para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial, gerando modelos ou sugerindo analogias.

Os processos mentais presentes no modo de pensamento visual-espacial PVMM/PVR estão sintetizados no Quadro 4.3. As *intuições* que estão associados ao modo de pensamento visual-espacial PVMM/PVR seguindo a terminologia de Fischbein são de dois tipos: intuições secundárias e intuições antecipatórias. As *intuições secundárias* são produtos desenvolvidos como resultado de uma formação intelectual sistemática (intuições afirmativas) e são interpretações de vários factos aceites como certos. O uso do conhecimento em situações dinâmicas e perceptualmente ricas, como por exemplo, usar um micromundo, parece poder originar a aquisição de intuições. “A aquisição de intuições não pode ser produzida por mera aprendizagem verbal...mas elas só podem ser conseguidas como um efeito dum envolvimento directo, empírico do sujeito numa actividade prática ou mental” (Fischbein, 1987, p. 95). Particularmente intuições secundárias podem ser adquiridas. “Se por certos meios, por exemplo, usando a Geometria da Tartaruga baseada no Logo, formos capazes de ver *directamente* que a “soma dos ângulos internos de um triângulo” *deve necessariamente* permanecer constante (devido a compensações internas), adquirimos uma nova compreensão intuitiva – uma intuição secundária” (Fischbein, 1987, p. 68).

As *intuições antecipatórias*, que me parecem também caracterizar este modo de pensamento, aparecem como uma descoberta, como uma solução súbita a um problema, não estabelecendo simplesmente um dado facto. Pode-se supor que as intuições antecipatórias são inspiradas, dirigidas, estimuladas ou bloqueadas por intuições afirmativas (primárias e secundárias). As intuições antecipatórias são o efeito de uma actividade criativa em matemática, de um processo construtivo no qual procedimentos indutivos, analogias e suposições plausíveis jogam um papel fundamental. Nas intuições antecipatórias há geralmente uma certa necessidade (não subjectivamente sentida) para um controlo analítico (Fischbein, 1987).

Quadro 4.3. Processos mentais do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens.

Modo de pensamento visual-espacial	Processos mentais associados
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVMM/PVR).	<ul style="list-style-type: none"> - Intuições secundárias e intuições antecipatórias. - Unificações. - Transformações mentais (mudanças de posição e mudanças de forma). - Modelos mentais, comparações, descoberta de relações entre imagens, de propriedades e de factos. - Abstracção reflexiva, generalização reconstrutiva. - Sintetizar. - Estruturação espacial. - Coordenação. - Construção visual.

A operação mental *unificação*, designada por *unitizing* no mundo anglo-saxónico, que consiste em construir e coordenar unidades abstractas está presente no PVMM/PVR e é identificada como base para muita actividade matemática tanto geométrica como numérica. Wheatley (1992) diz que pavimentações no plano são uma fonte útil para desenvolver a operação unificação.

O termo *transformação mental* é usado para referir um tipo de processo que envolve a alteração de uma representação mental em um de dois aspectos ou numa composição dos dois: o deslocar, isto é o mudar de posição, e o transformar, onde só existe uma mudança de forma. Tal como referem Piaget e Inhelder (1977), estes dois aspectos estão relacionados e há apenas uma diferença de complexidade entre deslocamentos e transformações. Em particular, mudar a forma de um objecto pode consistir em deslocar as partes. Reciprocamente, quando deslocamos um objecto sem modificar a sua forma, este pode deslocar-se em relação a outro e a configuração do conjunto mudar. Para alguns, as transformações mentais são moduladas por transformações matemáticas e I. A Kaplunovich (citado em Gusev e Safuanov, 2003) aponta que

“a estrutura do pensamento espacial (...) é determinada pelas operações que correspondem (...) às adequadas transformações matemáticas básicas (...) Operações básicas executadas em imaginação com imagens de figuras espaciais são: a translação paralela, a rotação, a simetria central, a simetria axial, a simetria em relação a um plano, a homotetia, a projecção paralela, a projecção ortogonal, a interpretação gráfica de operação de adição de funções, a interpretação gráfica de operação de multiplicação

de uma função por um número, a compressão e a dilatação de gráficos de funções” (Gusev e Safuanov, 2003, p. 90).

Gusev e Safuanov revelaram três tipos de transformações mentais com imagens: transformações que resultam na mudança da posição espacial de uma imagem (1º tipo); transformações que mudam a estrutura de uma imagem (2º tipo); execução repetida e longa de transformações dos dois primeiros tipos (3º tipo).

A *abstracção* que caracteriza este modo de pensamento é do tipo reflexivo, processo essencialmente construtivo onde são construídos objectos mentais e acções sobre esses objectos. Esquemas, colecções mais ou menos coerentes de objectos e processos (acções mentais), são invocados pelo sujeito, de forma a compreender, tratar e organizar uma situação problemática ou a conhecer um conceito matemático. A compreensão da trajectória como uma coordenação de deslocamentos sucessivos para formar um todo contínuo é um exemplo de abstracção reflexiva no pensamento da criança (Dubinsky, 1991). A abstracção pseudo-empírica (no sentido de Piaget) como sub-variedade da abstracção reflexiva, está então presente neste modo, baseada nas próprias acções da criança sobre objectos e surge das suas coordenações graduais. A abstracção reflexiva difere da pseudo-empírica, porque está relacionada não tanto com as próprias acções mas com as interrelações entre as acções (Dubinsky, 1991).

A *generalização construtiva* é uma forma de construção de imagens que conduz a uma nova organização estrutural criando novas formas, novos modelos e novos conteúdos e está intimamente relacionada com a abstracção reflexiva (Vuyk, 1981). O processo mental *sintetizar* que significa combinar ou compor partes, de tal forma que elas constituam um todo uma entidade é um pre-requisito básico para a abstracção (Dreyfus, 1991).

A *estruturação espacial* é um acto mental de construir uma organização ou forma para um objecto ou conjunto de objectos. A estruturação espacial determina a natureza ou a forma de um objecto ao identificar as suas componentes espaciais, ao combinar as componentes em compostos espaciais e ao estabelecer inter-relações entre as componentes e os compostos (Battista, 2003).

Um processo cognitivo fundamental para a compreensão do raciocínio neste modo de pensamento é a *capacidade de coordenação* que envolver vários aspectos, um deles é o indicado por Battista (2003, p. 79) “arranja (ordena) objectos abstractos em posições convenientes uns em relação aos outros e em relação aos todos aos quais eles pertencem”. Um outro aspecto da coordenação tem a ver com a capacidade de usar estruturas (sistemas de referência) como meio de organizar o pensamento. Assim por exemplo, um aluno adopta estruturas de referência para codificar as posições espaciais dos objectos que possam vir a ser

definidas: sistemas de referência centrados nele próprio, sistemas de referência centradas nos objectos ou em estruturas externas que são ou fornecidas pela estrutura espacial ou são impostas ao espaço mentalmente. É fundamentalmente relativamente a estes dois últimos sistemas de referência ou no uso da combinação de ambos que a capacidade de coordenação do espaço é aqui considerada.

O processo *construção visual* incluído neste modo de pensamento visual-espacial relaciona-se com o produzir ou modificar uma estrutura espacial por forma que esta estrutura corresponda a certos critérios geométricos pré-determinados. A capacidade de construção visual abranger capacidades tais como a antecipação e a organização lógica.

4.1.3. *Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento*

O modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE) está ligado ao processo pelo qual as representações mentais se materializam, à comunicação e à disseminação de ideias, à construção da argumentação, à descrição da dinâmica mental e ao apoio à conceptualização de entidades abstractas. O modo PVE é de natureza diferente dos modos PVP e PVMM/PVR pois se trata de uma espécie de condutor daqueles modos de pensamento.

Para comunicar as suas representações mentais, os alunos podem construir padrões, desenhos, figuras e gráficos, produções musicais ou rítmicas, usar gestos (linguagem corporal, expressões faciais) acções, descrições verbais (faladas ou escritas), representações matemáticas, etc. O modo de pensamento PVE confia fundamentalmente na linguagem visual, gestual e verbal e envolve imagens concretas, imagens dinâmicas, imagens padrão e ainda *imagens cinestésicas* (Brown e Presmeg, 1993) que implicam actividade muscular de algum tipo.

Os processos mentais associados a este modo de pensamento visual-espacial, estão sintetizados no Quadro 4.4. O conceito de *representação* externa é essencial para compreender processos construtivos no aprender e aplicar da matemática e, no sentido mais geral, é uma configuração que pode representar algo de alguma maneira. Por exemplo, uma palavra pode representar um objecto da vida real, um numeral pode representar a cardinalidade de um conjunto, ou o mesmo numeral pode representar uma posição numa linha numérica. As representações não ocorrem em isolado e geralmente pertencem a sistemas representacionais altamente estruturados, quer pessoais e idiossincráticos ou culturais e convencionais (Goldin e Kaput, 1996). De entre as representações externas encontram-se *personificações físicas externas*, situações físicas externas estruturadas ou um conjunto de

situações que podem ser descritas matematicamente ou vistas como incorporando uma ideia matemática; *expressões linguísticas*, verbais ou sintácticas e *construções matemáticas formais*.

Quadro 4.4. Processos mentais do modo de pensamento visual espacial resultante da exteriorização do pensamento

Modo de pensamento visual-espacial	Processos mentais associados
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	<ul style="list-style-type: none"> - Representações externas, tradução. - Descrição da dinâmica mental. - Construção de argumentação, de conjecturas. - Uso de analogias.

A representação da informação visual-espacial usada por alunos, vai depender do contexto onde o problema é posto. A mesma tarefa, pode exigir do aluno diferentes capacidades espaciais ou diferentes graus de abstracção de acordo com o meio através do qual ele a vai executar. Por exemplo, a um aluno do primeiro ciclo mostra-se uma ventoinha de 4 pás, e pede-se-lhe para construir uma igual, ou usando um programa de computador onde pode manipular um triângulo rectângulo através dos movimentos deslizar, rodar e virar ou usando vários acetatos que têm colado o mesmo triângulo do computador.

A representação da informação visual-espacial poderá ser uma imagem concreta ou um diagrama ou a representação dum conceito: a reflexão em torno de uma linha, ou a construção de um padrão ou uma pavimentação (“duas formas em L são unidas para formarem um rectângulo, e este vai ser a nova unidade para pavimentar o plano”. Tipos de manipulativos são determinantes para os processos mentais associados ao pensamento visual-espacial que vai estar presente na execução desta tarefa).

A *tradução* é um processo que está intimamente relacionado com a conversão entre representações. Por exemplo, a conversão do que é dado de forma simbólica em informação dada por figuras ou passar um problema em linguagem natural ou em forma gráfica para outra qualquer forma.

A *descrição da dinâmica mental* designa imagens mentais evidenciadas na linguagem oral ou em acções ou em gestos dos alunos e em expressões metafóricas. Com acções quero significar comportamentos concretos. Podem ser vistos, por exemplo, quando clicamos no rato para indicar no ecrã a direcção do movimento lembrado ou o comportamento visuo-motor resultante de se ter medido a aproximação de veículos ao atravessar uma estrada. Por gestos quer-se identificar principalmente movimentos de mão, gestos não convencionais, gesticulações e gestos como linguagem que acompanham a fala e com a qual formam um todo

como discuti na secção 2.5.2. Os gestos são considerados factores importantes para o ensino e aprendizagem (Radford, 2000; Roth, 2001), fazem parte integral da linguagem e do pensamento (McNeil citado em Edwards, 2003) e podem expressar novos níveis de compreensão antes de serem traduzidos através da linguagem (Ferrara, 2003a). A descrição da dinâmica mental vai ser designada por *factual* se o objecto de descrição são objectos geométricos e por *analítica* se o objecto de descrição são as propriedades geométricas.

Um modo de exteriorizar o pensamento visual-espacial é recorrendo ao *uso de analogias* ou a expressões metafóricas, sendo estas últimas formas específicas de analogias e assim modo de comunicação matemática e de construção de significado. Dois objectos, dois sistemas dizem-se *analógicos* se, na base de uma certa semelhança parcial, alguém se sente autorizado a supor que as respectivas entidades são similares também em outros pontos. A diferença entre analogia e uma outra parecença trivial é que a analogia justifica inferências plausíveis. Analogia implica então similaridade de estrutura (Fischbein, 1987). O modo de pensamento PVMM/PVR envolve o uso de analogias, as quais podem conduzir a novas imagens, a novos modelos ou a fazer comparações, transformações e descobertas de relações entre imagens. Safuanov e Gusev (2003) dizem que as novas imagens processadas por influência de associações e de analogias emergem com qualidades não esperadas, imaginação criativa, e basicamente são resultado das transformações do 2º e 3º, tipo acima descritas. O modo de pensamento visual-espacial PVE é o condutor dessas analogias, está ligado à exteriorização através da linguagem, de acções e de gestos ou através uma mistura distribuída de fontes perceptuais vindas do ecrã e de gestos, se esse aluno ainda não tem ainda uma linguagem para descrever e teorizar os acontecimentos de forma apropriada.

4.2. Sequências de modos de pensamento visual-espacial

Os três modos de pensamento visual-espacial, PVP, PVMM/PVR e PVE, podem por vezes, sucederem-se no sentido que ao modo PVP se pode seguir o modo designado por PVMM/PVR, e depois a este sucede o modo PVE. No esquema da figura 4.2, representam-se estas diferentes ligações e os números de 1 a 6 designam ligações ou sequências entre os diferentes modos. Vamos dar significado e exemplificar algumas conjecturas sobre ligações entre os diferentes modos do pensamento visual-espacial:

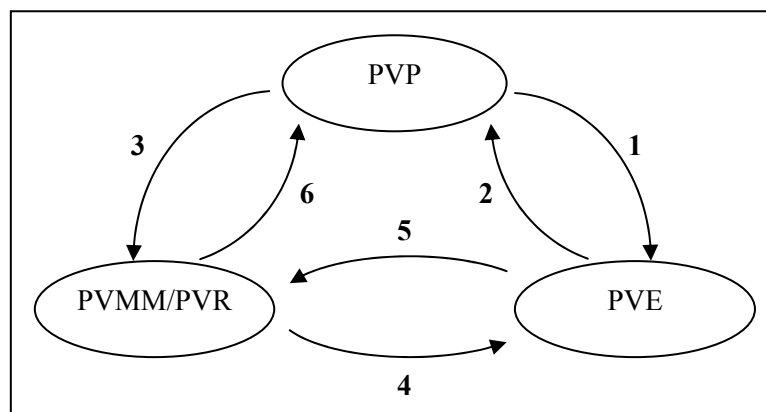


Fig. 4.2. Modos do pensamento visual-espacial e suas ligações.

A *ligação 1* quer significar que imagens previamente percebidas podem ser imediatamente comunicadas por gestos, diagramas ou descrições verbais. A *ligação 2* designa o caso em que o pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento pode anteceder o resultante da percepção. Vejamos alguns exemplos onde parece notória a existência desta ligação: quando construímos uma planta ou maquete, ou usamos material multibásico ou utilizamos um ambiente computacional, e com acções sobre essas representações resultantes da exteriorização do pensamento a percepção de um dado conceito ou estrutura é facilitada; no raciocínio subjacente ao esquema imagético operativo (Dörfler, 1991) (quando se associa operações específicas – divisibilidade ilimitada e em partes iguais – com um segmento de recta desenhado, estamos a adquirir, graças à execução destas operações um certo conceito por percepção, a figura de um segmento de recta como um contínuo).

Na *ligação 3* ao modo PVP segue-se o PVMM/PVR. Por exemplo, a alunos de 10-11 anos foi-lhes proposta a seguinte situação geométrica (Sesay, 1993, p. 23): “começa-se-lhes por mostrar os dois diagramas que a seguir expomos (figura 4.3.) e depois convidam-se as crianças a fechar os olhos e a actuar mentalmente sobre o círculo encolhendo-o ou alargando-o de forma a notarem o que vai acontecer”. As crianças, após terem percebido as figuras dadas, usam os seus poderes mentais para operar sobre imagens de pontos, linhas, círculos, quadrados. Estas transformações mentais são características do modo PVMM/PVR.

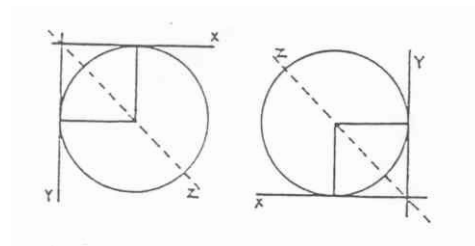


Fig. 4.3. Diagramas apresentados às crianças.

A *ligação 4* ocorre quando, após a manipulação mental das suas imagens, as crianças na tarefa anterior, descrevem essa mesma dinâmica, isto é, as crianças foram capazes de: discutir as imagens do círculo e do quadrado de acordo o crescimento ou encolhimento do círculo; apontar direcções sobre as quais os pontos se moveram e para cada caso dizerem o que estava a acontecer tanto ao círculo como ao quadrado.

Pode ser pois identificado o par de *ligações (3, 4)* na execução de toda a tarefa anteriormente proposta, o qual quer designar que ao modo PVP sucede-se o modo PVMM/PVR e seguidamente o PVE. É o caso da situação em que interpretamos a linguagem duma figura geométrica, manipulamos as imagens mentais aí usadas, associamos com experiências anteriores, e traduzimos o resultado em informação verbal.

A *ligação 5* traduz acções sobre representações externas, as quais fazem emergir, por exemplo, transformações mentais de imagens, relações entre imagens mentais, características próprias do modo PVMM/PVR. Com gráficos de computador interactivos, a facilidade de manipulação de objectos sujeitos a deformações, especialmente em posições quase críticas, ou investigação visual directa de objectos no espaço a quatro dimensões, muitas vezes conduzem a novos conjecturas e a novos métodos (Banchoff e Schwartz, 1988).

Uma *ligação do tipo 6* significa que ao modo PVMM/PVR se segue um pensamento visual-espacial resultante da percepção, modo. Essa ligação está presente quando por exemplo, a um aluno é primeiro pedido para transformar mentalmente imagens (modo PVMM) e depois exige-se-lhe que compare os resultados daquelas transformações com outras figuras dadas. Para esta segunda parte o aluno tem que evidenciar capacidades tais como percepção das relações espaciais, percepção da figura fundo, constância perceptual, as quais sustentam um pensamento visual-espacial resultante da percepção.

O par de *ligações (4,5)* parece estar patente quando por exemplo um aluno vai construir um padrão, onde lhe é exigido a rotação mental de uma imagem construída, determinar antecipadamente a possibilidade de um deslocamento, a conceptualização e imaginação de um padrão regular e a produção desse padrão. Haverá então uma interacção entre o padrão e a imaginação no sentido que o todo é a combinação tanto do interno como do externo (Scrivener, 1995). Está ainda presente quando estudantes usam um ambiente

computacional onde podem examinar as propriedades de um grande número de curvas e de famílias de curvas, para ver relações ou padrões que de outro modo seria difícil, a sequência de ligações (4,5) está então presente (Banchoff e Schwartz, 1988). Os estudantes podem então gerar conjecturas na base destas observações, tentar técnicas analíticas para provar algumas dessas conjecturas, e partilhar todas as suas interpretações com a turma.

O par de *ligações* (2,3) é identificado por exemplo, no raciocínio subjacente aos esquemas imagéticos relacionais identificados por Dörfler (1991). Nestes esquemas, o conteúdo essencial consiste de relações construídas no portador concreto. Estas relações não são imediatamente percebidas, mas precisam de ser mediadas e construídas cognitivamente. Esta mediação é muitas vezes fornecida por certas transformações ou operações (mentais) com o portador concreto.

Estas ligações não ocorrem apenas em pares. Por exemplo, a sequência de ligações (2,3,4) podem encontrar-se quando representações visuais gráficas de objectos e relações matemáticas são possíveis no ecrã do computador e por acções visuais directas sobre esses objectos e por observação de mudanças subsequentes tem-se acesso a ver outros aspectos de informação, alguma dela que não podia ser descrita por palavras. Por exemplo é possível ter a compreensão da forma como os vectores velocidade e aceleração se relacionam com as funções curvatura e torsão de uma curva (Banchoff e Schwartz, 1988). Ainda, consideremos a solução do seguinte problema, apresentado por Guzmán:

”No seu livro *De Bello judaico*, Hegesipo conta que quando os romanos capturaram a cidade de Jotapat, Josephus e outros 40 judeus refugiaram-se numa gruta. Aí os 41 judeus decidiram suicidar-se em vez de se entregarem. A Josephus e outro amigo, tal ideia não os pôs nada felizes. Foi proposto que o suicídio se fizesse por uma determinada ordem. Colocar-se-iam em círculo e suicidavam-se na sua vez, contando três a partir dum entusiasta que a todo o custo queria ser o primeiro. Em que lugares se deveriam colocar José e o amigo para serem os dois últimos, e depois em maioria absoluta, decidirem que não estavam de acordo com o automassacre? ” (Guzmán 1996, pp. 20-21).

Uma solução simples seria: colocam-se 41 pedras em círculos com um número 1, 2, 3, ..., 41 e vão-se simulando os suicídios até se verificar quem são os dois últimos. A manipulação concreta de objectos permite-nos resolver este problema concreto e perceber uma estrutura de solução do problema (ligação 2) que ajudará a averiguar a solução para casos mais abstractos - *o que irá suceder com m homens que contam de n em n^2* ? O modo de pensar visual-espacial usado para achar a solução deste novo problema tem a ver com o terno de

² Guzman (1996) chama a este processo, visualização isomórfica, pois os objectos têm uma correlação “exacta” na representação com as relações com que se pretende estudar.

ligações (2, 3, 4), onde as acções resultantes da exteriorização do pensamento pode facilitar a aquisição de uma estrutura, após a identificação dessa estrutura segue-se a manipulação mental de imagens e a descrição da dinâmica mental usada para resolver o dito problema.

A sequência de *ligações* (3,6,1) parece estar presente na investigação científica. Por exemplo, na teoria do átomo de Rutherford que propõe que o modelo planetário para o átomo de hidrogénio é uma analogia pictorial da representação do sistema solar, as experiências de observação e conhecimento de Rutherford sobre o sistema solar permitiu-lhe fazer conjecturas, construir, transferir e prever relações, desenvolver uma analogia imagética desse domínio para o domínio do átomo do hidrogénio (ligação 3). Estruturas relevantes podem ser extraídas ou melhor percebidas de um domínio de experiência bem conhecido, o sistema solar, para o domínio do átomo do hidrogénio (ligação 6). Essas compreensões foram finalmente experimentadas ou descritas ou representadas por Rutherford (ligação 1) (Issing, 1990).

4.3. Influências marcantes na construção do modelo teórico

A construção do modelo teórico sofreu influências variadas, como já foram referidas no capítulo II. Diferentes tipos de intuição propostos por Fischbein foram usados intensamente e, no intuito de compreender e ver diversas dimensões da abstracção também me servi das ideias e terminologia sobre a abstracção de Piaget e Dubinsky. As ideias da Damásio sobre as imagens, as classificações de capacidades espaciais de Del Grande, a tipologia de capacidades espaciais de Pallascio, Talbot e Mongeau, o estudo da importância da matemática corpórea de Lakoff, bem como a perspectiva sócio-cultural da construção de conhecimento de Vygotsky foram outros eixos de influência na construção do modelo.

Retomo nesta secção a discussão sobre os processos imagéticos identificados nos trabalhos de Piaget, Presmeg e Dörfler que foram já discutidos no capítulo II, mas que desejo tomar de novo após a apresentação do modelo. A imagética visual, usada no modelo de pensamento visual-espacial proposto, apoia-se como já foi referido na definição de imagem visual de Presmeg “esquema mental que ilustra informação visual ou espacial” (1986, p. 297). A razão de privilegiar as ideias de Presmeg é que parece que os tipos de imagética identificados por ela: imagem concreta, imagem de memória, imagem cinestésica, imagem dinâmica e imagem padrão (Brown e Presmeg, 1993) têm a ver com muitas das facetas imagéticas conjecturadas para os três modos PVP, PVMM/PVR e PVE.

Outras referências importantes no sentido de clarificação e procura de diferentes facetas da imagética foram: a classificação da imagética criada por Piaget, e a classificação

dos esquemas imagéticos de Dörfler. Desejo agora, após a apresentação do modelo, identificar pontos comuns e não comuns subentendidos na imagética que sustenta as três classificações de Dörfler, Piaget e Presmeg.

Piaget olhou a imagética como suporte do pensamento da primeira infância e relacionou-a com a teoria de estádios de desenvolvimento cognitivo. Dörfler usou uma abordagem de significado e compreensão matemática para conceitos, dando ênfase à imagética através de esquemas imagéticos. A imagética é então incompatível com a teoria de estádios de desenvolvimento cognitivo de Piaget, o nível formal, não é o nível mais elevado, mas aquele que complementa outras formas de actividade cognitiva tais como aquelas baseadas em esquemas imagéticos (Dörfler, 1991).

No Quadro 4.5 sintetizo como os diferentes aspectos imagéticos identificados por Dörfler, Piaget e Presmeg em diferentes contextos, se distribuem pelos três modos de pensamento visual-espacial. No quadro não pretendo fazer estabelecer comparações entre as diferentes terminologias para a imagética usada pelos três investigadores.

Os vários tipos de imagética identificados por Presmeg são uma forte referência pois abarcam muitos aspectos imagéticos em matemática, desde imagens concretas, protótípicas (que podem ser ou não metafóricas ou metonímicas) a imagens dinâmicas e imagens padrão (onde os pormenores concretos são desprezados e puras relações são representadas num esquema visual-espacial “este tipo de imagética está notavelmente ilustrada nas imagens de memória do jogador de xadrez” (Presmeg, 1992, p. 602)). Contudo ela não referiu explicitamente, imagens antecipadoras, fundamentais para a organização do pensamento.

A classificação dos esquemas imagéticos definida por Dörfler parece traduzir a sua preocupação em explicar a representação, comunicação, e exteriorização do significado dos conceitos ou dos termos matemáticos e a objectivação da forma de pensar usando o portador. Muitos esquemas imagéticos são baseados em experiências corpóreas e reflectem movimentos e relações espaciais do corpo humano (Johnson, 1987). O esquema imagético figurativo de Dörfler parece fortemente relacionado com a percepção e segundo a opinião de Presmeg tem alguns dos atributos do seu conceito de imagética padrão. O esquema imagético relacional, inclui a imagética dinâmica. O esquema imagético operativo assemelha-se a imagem cinestésica e o esquema imagético simbólico é ilustrado por imagens de memória por fórmulas (Presmeg, 1992).

Quadro 4.5. Modos do pensamento visual-espacial e as três classificações de imagética.

Modos de Pensamento Visual-espacial	Imagética segundo Presmeg	Esquemas imagéticos segundo Dörfler	Imagética segundo Piaget
PVP	Imagens concretas Imagens de memória	Esquema imagético figurativo	Reprodutora estática
PVMM/PVR	Imagens dinâmicas Imagens padrão	Esquema imagético relacional	Antecipadora cinética Antecipadora de transformação
PVE	Imagens concretas imagens cinestésicas Imagens dinâmicas Imagens padrão Imagens de memória	Esquema imagético simbólico Esquema imagético operacional Esquema imagético relacional Esquema imagético figurativo	Reprodutora estática Reprodutora cinética Reprodutora de transformação

Consideremos agora o tipo de imagética esquemática, antecipadora, desprovida de realidade sensorial, imaginária ou emocional, como a que é considerada, por exemplo, quando se joga mentalmente o xadrez. Sacks (1985) encontrou um doente que só tinha este tipo de imagética. Parece que Dörfler não contemplou completamente um esquema imagético que envolva este tipo de imagética. Presmeg identificou esse tipo de imagética, imagética padrão.

Piaget na sua classificação das imagens não parece referir-se à imagética semelhante à imagética padrão de Presmeg, talvez porque a sua investigação envolvesse crianças muito jovens. As imagens de memória estão evidenciadas nas imagens reprodutoras, as imagens dinâmicas estão indirectamente referidas através das imagens antecipadoras, mas as imagens cinestésicas não são explicitamente referidas. Imagens concretas que provêm da percepção, por exemplo que resultam da manipulação de software, parecem não se encaixar na classificação de Piaget.

Os diferentes aspectos imagéticos que as classificações de Dörfler, Piaget e Presmeg, sustentam, podem ser distribuídos pelos três modos de pensamento visual-espacial, PVP, PVMM/PVR e PVE do modelo de pensamento visual-espacial proposto, tal como o Quadro 4.5 exhibe. Contudo nenhuma das três classificações da imagética engloba todas as facetas imagéticas conjecturadas.

4.4. Questões específicas sobre as quais avaliar o modelo

Vamos colocar a seguir dois tipos de questões no sentido de refinar o modelo teórico inicial elaborado para compreender o pensamento visual-espacial. Um tipo de questões (a primeira e segunda) está relacionado com a arquitectura do modelo inicial conjecturado. O outro tipo de questões (da terceira à décima) é de natureza diferente, são conjuntos de pontos que pretendem avaliar o modelo de pensamento visual-espacial de acordo com os oito critérios de Alan Schoenfeld (2002) que discuti no capítulo III.

Questões relacionadas com a arquitectura do modelo:

1. O modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e de construção de relações entre imagens deve ser decomposto em dois modos distintos de pensamento visual-espacial: modo resultante de manipulação mental de imagens e modo resultante da construção de relações entre imagens?
2. Como os modos de pensamento visual-espacial dos alunos foram influenciados pela dimensão sócio-cultural?

Questões relacionadas com os critérios de avaliação de Schoenfeld:

3. O modelo de pensamento visual-espacial proposto tem poder descritivo, isto é descreve bem os fenómenos observados? Os modos de pensamento propostos revelam-se nos dados? Em particular são identificadas metáforas e gestos no modo PVE? Os processos mentais conjecturados para cada modo de pensamento, observam-se nos dados? Há outros processos mentais que foram detectados nos dados do estudo?
4. O modelo teórico de pensamento visual-espacial tem poder interpretativo, fornece de forma razoavelmente precisa explicações sobre como e porquê as coisas funcionam?
5. Qual é o âmbito do modelo teórico?
6. Que espécie de predições o modelo teórico de pensamento visual-espacial proposto pode apoiar?
7. Qual foi o rigor e especificidade usada na construção do modelo teórico inicial de pensamento visual-espacial?
8. Foram construídas afirmações não tautológicas ou predições sobre o modelo teórico de pensamento visual-espacial para serem testadas empiricamente?
9. O modelo teórico inicial de pensamento visual-espacial é replicável, generalizável e credível?
10. Há múltiplas linhas de evidência sobre o modelo teórico inicial de pensamento visual-espacial? Essa fontes de informação sobre o modelo descrevem tanto quanto possível uma mensagem consistente?

4.5. Limitações do modelo

O âmbito deste estudo é o da educação em geometria. Também o modelo proposto de pensamento visual-espacial não foi pensado para cegos congênitos ou para indivíduos que tendo sido invisuais recuperaram entretanto a visão. O modelo foi desenvolvido tendo como base processos mentais comuns à maioria dos indivíduos. Competências imagéticas características de ocupações científicas elaboradas, como por exemplo as presentes na investigação científica avançada, não foram igualmente consideradas, dada a escassez de investigação científica nessa área.

Capítulo V

Análise do modelo teórico para o pensamento visual-espacial

Este capítulo destina-se fundamentalmente ao confronto do modelo teórico para o pensamento visual-espacial descrito no capítulo IV com os dados recolhidos. Vão ser tidos em conta os objectivos específicos do primeiro objectivo do estudo: compreender o desenvolvimento do pensamento visual-espacial dos alunos à luz do modelo teórico, identificando os modos de pensamento visual-espacial e exemplificando como esses modos de pensamento visual-espacial foram sócio-culturalmente vividos; identificar os processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial que os alunos utilizaram na execução de tarefas geométricas com ênfase especial nos mecanismos conceptuais metáforas e gestos. Procurou-se averiguar se os três modos de pensamento visual-espacial oferecidos pelo modelo (modo resultante da percepção, PVP, modo resultante da manipulação mental de imagens e da construção de relações entre imagens, PVMM/PVR e o modo que está ligado à exteriorização do pensamento, PVE) se revelam na análise dos dados. Em particular se no modo PVE são identificados metáforas e gestos. Também se quis saber se os processos de pensamento conjecturados para cada modo de pensamento visual-espacial, se observam. E se há outros processos mentais, para além dos conjecturados, que foram exibidos nos dados do estudo. Uma outra questão foi também colocada no sentido de examinar como os modos de pensamento visual-espacial dos alunos foram influenciados na aula pela dimensão sócio-cultural. Estas questões pretendem testar o modelo teórico e estão relacionadas com a arquitectura do modelo bem como com os critérios de avaliação de modelos de Alan Schoenfeld.

Os três modos de pensamento visual-espacial podem por vezes suceder-se, no sentido que, por exemplo, ao modo PVP se segue o modo designado por PVMM/PVR, e depois a este sucede o modo PVE. Conjectura-se ainda que o pensamento visual-espacial é um processo de andar de uns modos de pensamento para os outros. A natureza do modo pensamento PVE é

diferente da dos dois outros modos de pensamento, pois ele é de certo modo uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial, na medida em que é por seu intermédio que podemos conhecer o modo PVP e o modo PVMM/PVR.

Na análise do modelo teórico começo por separar o pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens, do pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens, assim *o modo PVMM/PVR será dividido em dois modos distintos o modo PVMM e o modo PVR* e não um só modo de pensamento visual-espacial, como inicialmente tinha sido pensado. Essa separação foi conjecturada no início e gradualmente sentida como necessária, à medida que o examinar dos dados foi sendo feito. O *modo PVMM* será então definido por operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens e o *modo PVR* por operações intelectuais relacionadas com a construção mental de relações entre imagens, a comparação de ideias, conceitos e modelos. Esta decisão vai responder à primeira questão colocada ao modelo teórico inicial relacionada com a arquitectura do modelo (cap. IV).

5.1. Caracterização empírica dos modos de pensamento visual-espacial

Esta secção diz respeito aos pontos a examinar relativos à terceira questão para testar o modelo teórico inicial (cap. IV) procurando investigar se os quatro modos do pensamento visual-espacial se revelam na análise dos dados. Tentamos ainda saber se os processos de pensamento supostos para os vários modos de pensamento visual-espacial se observam e se há outros processos mentais, para além dos conjecturados, que foram detectados nos dados do estudo. Os processos de pensamento associados aos vários modos de pensamento visual-espacial vão estar a *itálico* assim como decidi acompanhar as transcrições de pequenas reproduções do ecrã do computador que vão estar colocadas à direita.

5.1.1. Modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção

Os dez episódios seguintes pretendem fundamentalmente caracterizar o pensamento visual-espacial dos alunos resultante da percepção que envolve operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial e de memória e identificar os processos mentais que lhe estão associados: intuições primárias; construção visual; re-apresentação e avaliação de imagens; reconhecimentos visuais; identificação de objectos, modelos, formação de um “gestalt”, apreensão global de uma configuração geométrica; abstracção perceptual, abstracção ligada ao reconhecimento e geração de conceitos. Vou designar os episódios através de números que

representam apenas a sequência pela qual os estou a analisar e que não está relacionada com ordem ou importância que surge no texto. Em cada episódio serão assinalados também por números os parágrafos correspondentes às falas (intervenções) nos diálogos entre a investigadora e os alunos.

Consideremos o *episódio 1* que constitui um exemplo de ocorrência do modo visual-espacial resultante da percepção, modo PVP e de alguns dos seus processos mentais fundamentalmente a *abstracção* no seu aspecto *perceptual*. A investigadora dá à Carlota a folha da tarefa IV (B) e, apontando para a figura formada por mais quadrados, convida a aluna a cobrir esta figura com outras mais pequenas, formadas por três quadrados iguais, idênticas às coloridas que estão na folha da tarefa: uma figura verde cujos quadrados estão dispostos na horizontal; e uma figura vermelho de quadrados dispostos em L que rodou de 180°.

A Carlota começou por pintar uma figura verde, aquela onde os três quadrados estão dispostos horizontalmente (figura 5.1).

1 Inv.: *Há mais verdes? Ou só esta?*

2 Carlota: *Há mais uma.*

3 Inv.: *Então desenha-a.*

(A aluna pinta mais uma figura verde, mas dispõe os três quadrados na vertical) (Fig. 5.1).

4 Inv.: *Figuras de cor vermelha, há?*

5 Carlota: *Não*

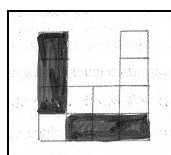


Fig. 5.1. Resposta da Carlota.

A Carlota *identificou* logo na figura maior uma das figuras mais pequenas, aquela cujos quadrados estão dispostos horizontalmente. Depois tornou a reconhecer a mesma figura embutida na figura maior, agora disposta na vertical (descrição entre os parágrafos 3 e 4). Ela não identifica na figura maior a outra figura mais pequena (parágrafo 5). A aluna processou a informação visual mas de forma incompleta, não fez o reconhecimento da estrutura espacial da figura maior, como composta de quatro peças, duas iguais a cada uma das figuras mais pequenas. Existiu antes um aspecto básico perceptual de *abstracção* feita fundamentalmente a partir das características superficiais das figuras. A tarefa exigia a antecipação mental e a manipulação mental de imagens. A Carlota antecipou e transformou mentalmente uma

imagem, usou então uma imagem dinâmica e pintou a segunda figura verde. As imagens usadas foram quase todas concretas.

No *episódio 2*, o Delfim e o Abel do grupo 1 trabalhavam em díade na aula começam a resolver a tarefa *flor* que consiste em usar o micromundo Tarta para construir a figura 5.2.



Fig. 5.2. Flor.

Delfim chamou o Tarta, para isso teclou *t*, e no ecrã apareceu o triângulo T1.



1 Abel: *Vai bem. Espera, espera.* (O Abel olha para o Tarta do ecrã, pega na folha da tarefa e depois de ter olhado para ela, diz)

2 Abel: *Estes Tartas não têm...*

3 Abel: *Ó professora estes Tartas ...* (Começou a chamar apontava um triângulo, não se percebe. Aparece o informático, os dois alunos falam para ele inaudível. O informático coloca a folha da tarefa junto do ecrã para que os alunos possam comparar melhor as imagens e não disse nada).

Abel não identificou o Tarta na estrutura espacial da *flor* porque o triângulo que surgiu no ecrã não está na mesma posição que os Tartas da *flor*, por isso chamou pela professora (parágrafo 3).

4 Delfim: *Ai é assim?*

5 Abel: *Aqui é o ponto...*

(Não se percebe o que eles dizem, ficam sozinhos a olhar um para o outro. Abel começa por arrastar o seu dedo sobre o ecrã para cima, pôs as mãos na cabeça e com a mão direita sobre o ecrã, roda-a para a esquerda, indicando ao colega o movimento a que deveria ser submetido o Tarta e diz:)

6 Abel: *Vira isso.*

Subitamente Abel *percepcionou a figura fundo* (acto visual de identificar uma componente específica numa determinada situação) e reconheceu o Tarta na estrutura da *flor*, ou talvez melhor identificou a estrutura espacial *flor* como combinatória geométrica de vários Tartas em diversas posições.

(Delfim começou a teclar mas lembrou os comandos e logo emendou o Abel, ameaçando de pancada com o dedo indicador da mão direita.)

7 Delfim: *Rodar*

(Delfim começou a teclar a palavra, entretanto Abel também parecia querer teclar mas Delfim afastou-lhe a mão e surgiu uma caixa de erro, pois não tinha sido indicado de quanto deveria ser rodado).

8 Delfim: *Não, é roda* (tecla *roda 90* seguido de *enter*, aparecendo no ecrã T2).



9 Delfim: *Olha agora é apa.* (Tecla *apa* para apagar a figura anterior, ficando no ecrã apenas a figura T3.



Abel mexe nas teclas para mudar o passo do Tarta, como se podia ver pelo aparecimento da caixa. Entretanto Delfim impede Abel de mexer nas teclas).

10 Inv.: *Se precisam de um Tarta, aqui está ele.* (A investigadora deixa ficar um triângulo de papel semelhante ao Tarta. Os dois alunos não ligam nenhuma e Delfim coloca o Tarta de papel ao lado do monitor, pois o sítio onde fora colocado incomodava-os).

11 Abel: *l, enter e vira* (Abel tecla *l*, escolhe dois pontos para construir uma linha, e depois disso, tecla *vira* e o Tarta foi virado em torno dessa linha, assim foi obtida no ecrã a figura T4.



Agora Abel pega na folha da tarefa, mostrou-a a Delfim e os dois comparam a figura da folha da tarefa com a do ecrã. Abel indica com o dedo como deviam continuar a construir, para a direita:)

12 Abel: *Isto está para a primeira.*

13 Delfim: *Não, Não. Agora tem de se ...* (com um dedo da mão direita aponta no ecrã a figura e, assobiando aponta agora na direcção da sua esquerda, a oposta do colega. Continuam a discutir e Delfim simula virar com as mãos) *e depois vira com este.* Aponta para a figura T4 do ecrã).

Os alunos tentam *reconhecer* a figura do ecrã como componente da figura *flor* e estabelecer relações entre aquela componente e a *flor*, *abstracção ligada ao reconhecimento* de uma estrutura espacial. Contudo surge um conflito devido ao modo diferente como os dois alunos interpretam a figura T4 embutida na *flor* (parágrafos 12 e 13). Os reconhecimentos das figuras são diferentes e diferentes seriam os caminhos a prosseguir para a construção da *flor*.

Nos parágrafos seguintes ambos estão certos e nenhum quer ouvir o outro. Prosseguem na teimosia e não param para falar sobre o que estão a pensar.

14 Abel: *Não.* (Abel mexe no ecrã com a mão para a direita e alarga a mão no ecrã) *pode ficar aqui.*

15 Delfim: *Não.* (Aponta no ecrã com a mão a outra direcção para construir a figura).

16 Abel: (Abel diz qualquer coisa inaudível) *pois se deixarmos...* (mexendo com as mãos no ecrã).

(Delfim começa a teclar, carregando duas vezes em *enter*. A figura do ecrã T4 não se moveu.)

17 Abel: *dd.*

18 Delfim: *Ai ai e agora disparate* (põe a mão na cabeça).

(Abel começa a escrever no teclado *de* seguido de outra letra e aparece uma caixa de erros).

19 Delfim: *É apa.*

Neste episódio os pensamentos visual-espacial do Abel e do Delfim (apesar de até ao parágrafo 3, o seu pensar visual-espacial não ser muito claro, está oculto na dinâmica mental do Abel) evidenciam o uso do modo PVP em duas alturas bem identificadas: parágrafos de 1 a 5 e parágrafos 12 e 13. Abel deixou de seguida de pensar visual-espacial como resultado da percepção, modo PVP (parágrafos 5 e 6). Repare-se que Delfim e Abel voltaram a usar um modo de pensar resultante da percepção (parágrafos de 13 a 16) e estavam em conflito.

Para convencer o outro, antecipando do Tarta, pensando assim dum modo visual-espacial diferente do modo PVP, cada um usou gestos indicando movimentos. O Delfim usou mesmo uma metáfora do movimento “assobiando e apontando na direcção da sua esquerda” para convencer o colega.

Neste *episódio 2*, as imagens dos alunos durante o seu modo de pensar PVP, foram imagens concretas. O processo mental que neste episódio está associado ao modo PVP é fundamentalmente a *abstracção relacionada com o reconhecimento* de uma estrutura espacial familiar. As transcrições deste *episódio 2* serão mais tarde, novamente analisadas noutra perspectiva.

Os alunos Edgar e Gil do grupo 2 trabalhavam em díade na aula e iam resolver a tarefa *espinha* que consistia em construir a figura 5.3. usando o micromundo Tarta.

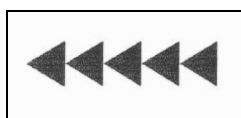


Fig. 5.3. Espinha.

Exactamente antes do episódio que se segue, *episódio 3*, o passo com que o Tarta se podia movimentar, era o “*cm*” (que designa um número referente ao comprimento do cateto maior do triângulo). Esse passo estava indicado no ecrã numa caixa de informação, e era o que convinha usar para deslizar o Tarta. No entanto não foi o utilizado, tendo sido antes substituído por 30, 40 e 45 (parágrafos: 7, 13 e 16 respectivamente). O Edgar e o Gil acabavam de construir no ecrã a seguinte figura R4 e entendem deslocá-la para a direita.



7 Gil: *pa* (Aparece a caixa para mudar o passo, onde ele coloca 30 e carrega em *enter*).

8 Edgar: *dd*. (Aparece a figura R5.)



9 Gil: *Ehh*.

10 Edgar: *É 40*.

11 Gil: *Pois é. Apaga o anterior.*

12 Edgar: *apa.* (Aparece a figura R6.)



13 Gil: *pa* (Gil escreve 40 na caixa que aparece para mudar o passo).

14 Edgar: *dd. Ehhh.* (Apareceu a figura R7.)



15 Gil: *Não, há melhor.* (Os dois alunos ficam a pensar. Edgar aponta para o desenho da folha, para comparar as figuras e ficam uns segundos a olhar para o ecrã.)

16 Gil: *Deve ser 45.* (Começa a teclar *pa* e muda o passo para 45.)

17 Edgar: *Ó pá não é nada disso... Já sei o que a gente vai fazer. Espera.* (Assinala com a mão como a indicar paragem e depois Edgar encosta-se à mesa com a mão a segurar a cabeça como a pensar enquanto o Gil escreve depois de uma certa indecisão *apa* e aparece no ecrã, a figura R6.)



18 Edgar: *Pronto.* (Teclou *dd* e apareceu a figura R8.)



19 Edgar: *Vês?* (Apontando para a figura do ecrã, Gil acena com a cabeça em sinal de concordância e Edgar continua a teclar *dd* até construir figura 5.4.)



Fig. 5.4. Metade da espinha construída pelo Edgar e o Gil.

Este episódio envolveu experiências de observação, percepção e interpretação e *avaliações de imagens*. Os alunos ainda não estavam suficientemente familiarizados com o micromundo Tarta e não dominavam bem os seus esquemas de acção, por isso usaram a estimacção visual e indicaram no *pa* (passo) a quantidade pensada adequada para fazer deslizar o triângulo (o Tarta). A *abstracção* usada pelos alunos é *perceptual* e resulta do uso do micromundo Tarta, (parágrafos 18 a 19), do consenso social pois a construcção a que chegaram não era exactamente igual à da folha de trabalho, mas eles concordaram que assim já estava bem (parágrafo 19) e na parecença entre as figuras. Neste episódio eles constróem uma parte da *espinha*, através dum pensamento visual-espacial resultante da percepção. Neste episódio, os processos de pensamento associados ao modo PVP têm a ver fundamentalmente com *avaliações de imagens* e *abstracção perceptual*.

Vejamos agora um outro episódio, o *episódio 4*, onde novamente o aluno exhibe o modo PVP mas tem-lhe associados três processos de pensamento: *re-apresentação de imagens*, *intuição primária*, *geração de conceitos* e *abstracção perceptual*. A investigadora dá ao Gil um geoplano circular desenhado numa folha A4 e marcadores de várias cores e pede-lhe para desenhar no geoplano um ângulo recto. O Gil desenhou na folha um ângulo recto cujas representações dos lados tinham sensivelmente o mesmo comprimento, não aproveitando todos os pontos favoráveis do geoplano. A investigadora continuou:

2 Inv.: *Desenha um ângulo cujo tamanho é metade do ângulo recto.*

(O Gil desenha um outro ângulo recto cujos comprimentos das representações dos lados eram mais pequenos que os do ângulo anteriormente desenhado).

3 Inv.: *Desenhar um ângulo cujo tamanho é o dobro do ângulo recto.*

(O Gil desenha ainda um outro ângulo recto em que uma das representações dos lados é maior que qualquer uma das representações dos lados do primeiro ângulo recto por ele representado e a representação do outro lado tem o mesmo comprimento das representações dos lados desse ângulo recto).

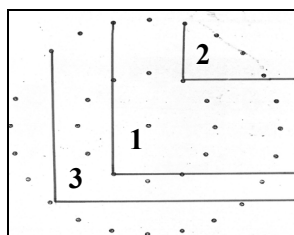


Fig. 5.5. Resposta do Gil à tarefa VI (B).

A resposta do Gil (figura 5.5) foi dada antes de o aluno ter sido sujeito ao ambiente de ensino e a sua familiaridade com ângulos era muito diminuta, quase que limitada ao conhecimento do ângulo recto. Quando lhe foi pedido para desenhar um ângulo recto, ele usou uma imagem de memória desse conceito, *re-apresentou* essa imagem, podendo ter aproveitado de outro modo o contexto (geoplano) que lhe era fornecido. Depois quando lhe foram pedidas representações de ângulos cujas amplitudes eram respectivamente metade e o dobro da do ângulo recto, ele *gerou esses conceitos por intuição primária*, isto é, houve uma aquisição cognitiva desenvolvida no indivíduo independentemente de qualquer ensino sistemático e baseada na experiência do dia a dia. O Gil nas suas representações deixou transparecer a seguinte concepção errónea “o tamanho do ângulo depende do comprimento dos lados” (descrição a seguir ao parágrafo 2). O Gil trabalhou agora com imagens concretas e a *abstracção perceptual* aqui usada é baseada nas características superficiais dum objecto

(ângulo recto), relativamente ao qual o Gil reteve internamente algumas das suas propriedades e excluiu outras.

Com o próximo episódio, o *episódio 5* quero evidenciar os seguintes processos que estão associados ao modo PVP: *formação de um “gestalt”* e a *abstracção baseada em reconhecimentos visuais*. A investigadora deu à Felisberta quatro triângulos rectângulos e pediu-lhe para ela fazer com eles, uma nova figura. Contudo deveria observar a regra que se segue “só deveria juntar os lados com mesmo comprimento”. A Felisberta construiu então a figura 5.6.

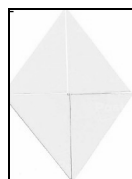


Fig. 5.6. Construção inicial da Felisberta na tarefa I (B).

- 2 Inv.: *Fizeste uma figura toda bonita. Quantos lados a figura tem?*
- 3 Felisberta: *Quatro.* (A aluna hesita, diz ah!, e apontando para os lados diz:)
- 4 Felisberta: *Um, dois, três e quatro.*
- 5 Inv.: *Cola-os lá.* (pausa).
- 6 Inv.: *Um desafio maior. Com estas 4 peças formar um triângulo. Não sei se é possível fazer ou não.*
- 7 Felisberta: (A aluna vai experimentando e depois de construir a figura 5.7 diz:)
Dois dá para fazer, mas um?!! ..

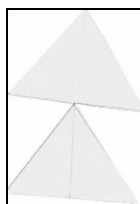


Fig. 5.7. Nova construção da Felisberta para a tarefa I (B).

A Felisberta executou esta tarefa antes de ser sujeita ao ambiente de ensino e manipulou triângulos com a mesma forma e o mesmo tamanho, segundo uma certa regra, construiu uma imagem concreta, que não era sua conhecida, tendo a *apreensão global da configuração geométrica e percepcionou propriedades* dessa figura construída (parágrafos de 2 a 4). Depois quando lhe foi posto novo desafio, manipulou novamente os triângulos,

construiu nova imagem concreta (provavelmente influenciada pela primeira figura já feita, parágrafo 7), *abstraindo* (baseada nas relações percebidas) um novo *gestalt* formado por dois triângulos (composição espacial de 4 triângulos) e não formada por um só triângulo, como lhe tinha sido pedido (a Felisberta não sabia se podia ou não construir esse triângulo, parágrafo 7). Parece-me claro que, neste episódio, o pensamento visual-espacial da Felisberta foi resultante da percepção, onde a *abstracção* desenvolvida foi baseada na acção (manipulação de peças) e no *reconhecimento de estruturas espaciais* que lhe eram familiares.

Num *episódio 6*, no qual desejo evidenciar *avaliação de imagens* e *abstracção baseada em reconhecimentos visuais* como processos de pensamento associados ao modo PVP, a investigadora convida o Delfim a fazer um jogo ao telefone, tarefa VIII (C), lê-lhe a tarefa e antes de começar o tal jogo, mostra-lhe duas folhas: a do amigo e a do Delfim e pergunta-lhe se tais folhas têm desenhado a mesma coisa.

2 Delfim: *Não.*

3 Inv.: *Tu vês mais o quê?*

4 Delfim: *Vejo mais um triângulo.*

5 Inv.: *O jogo é assim: vais pedir ao teu amigo para colocar a peça que ele tem igual a esta, em cima do triângulo e depois vais dar-lhe instruções para ele movimentar a peça de forma ... Ele não te vê, só te ouve, não conhece o teu desenho ..., nem te vê os movimentos, portanto tens que dizer as palavras muito bem ditas. Como lhe dizes? Vamos fingir, qual é a primeira coisa que lhe vais pedir?*

6 Delfim: *Põe a tua peça em cima do triângulo.*

7 Inv.: *Imagina que já fizeste isso. E agora? Podes movimentar a peça ou experimentar antes de falar.*

(O aluno experimenta: primeiro roda a peça no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, $\frac{3}{4}$ de volta, em torno vértice do ângulo do triângulo de menor amplitude. Depois recomeça novamente e roda agora a peça no sentido contrário do movimento dos ponteiros do relógio, de um quarto de volta, em torno do mesmo ponto anterior e vira depois o triângulo em torno do seu cateto maior).

8 Delfim: *Dá um quarto de volta no sentido contrário aos ponteiros do relógio, depois vira o triângulo com o bico (pausa....), vira o triângulo com o bico para a direita.*

Este episódio ocorreu antes do Delfim ser sujeito ao ambiente de ensino. O aluno experimentou e a partir da manipulação da peça triangular *reconheceu* os movimentos (descrição entre parágrafos 7 e 8), *avaliou as imagens*, escolhendo as que lhe pareceram mais adequadas, e *verbalizou a interpretação das suas acções* (parágrafo 8). O Delfim *abstraiu* a partir da acção. Contudo nem sempre nomeia os movimentos, parece desconhecer como os caracterizar e não consegue referenciar os elementos geométricos (parágrafo 8).

O episódio 7 que se segue quer exibir o processo *construção visual* associado ao modo PVP ocorrendo na mesma tarefa VIII (C). A investigadora leu ao Aldino a tarefa VIII (C), e depois disso o aluno começou a executar a tarefa.

1 Aldino: (Lê:) “*Põe a peça em cima do triângulo, mas com esse triângulo vais formar um rectângulo*”. (Depois manipula peça triangular, e foi-se apercebendo dos movimentos. Rodou a peça, colocando um dedo no vértice do ângulo do triângulo de menor amplitude e com a outra mão roda a peça).

2 Aldino: *Virar a peça até formar um triângulo maior e depois dar um quarto de volta.*
Esta resposta foi executada antes de ter sido sujeito ao ambiente de ensino. As primeiras instruções do Aldino (parágrafo 1) são o resultado da sua *interpretação* do fundo onde os triângulos estão representados na folha da tarefa, *construção visual*. A posição dos triângulos na folha da tarefa parecia de facto delimitar um quadrado e não um rectângulo. Depois a partir da manipulação da peça triangular, ele *reconheceu* os movimentos resultado de uma nova *abstracção* a partir da acção. Contudo ele não lembrava ou desconhecia que devia virar em torno de uma linha, mas ultrapassou isso falando duma nova estrutura percebida quando se vira o triângulo, formar um triângulo maior. Aldino dominava pouco o vocabulário específico dos movimentos bem como as suas características. O pensamento visual-espacial do Aldino é resultante da percepção e evidenciam-se os seguintes processos de pensamento: *construção visual, apreensão global de uma configuração geométrica, abstracção ligada a reconhecimentos visuais*.

O episódio 8 quer principalmente destacar o uso de uma metáfora no modo de pensar PVP. A Felisberta já tinha respondido à primeira parte da tarefa VI (C) e para ela ficar acabada ainda tinha de resolver duas questões. A investigadora pediu-lhe para assinalar na figura da folha da tarefa uma recta vertical. A aluna faz trejeitos à cara, mostrando que não sabe o que é uma recta vertical. Então a investigadora põe-lhe outra questão.

2 Inv.: *Assinala na figura uma recta horizontal.*

3 Felisberta: *Ah! Lembrei-me agora das palavras cruzadas.* (A aluna assinala, traçando de forma correcta na figura pedida, a recta vertical e a recta horizontal.)

Neste episódio, passado antes da aluna ter sido sujeita ao ambiente de ensino, a aluna envolveu-se em actividades de observação (percepção e interpretação) da figura dada. A Felisberta não recordou imagens dos conceitos: recta horizontal e recta vertical, mas conseguiu identificá-las por *intuição* através da imagem metafórica “palavras cruzadas”. Através de uma *metáfora* básica ela fundamentou a sua compreensão das ideias de horizontal e vertical em termos da sua experiência do dia a dia. Imagens de memória fizeram parte da actividade mental da Felisberta. Os conceitos de horizontal e vertical foram então *gerados* e compreendidos em termos conceitos (imagens) concretas. Fundamentalmente os processos

mentais *intuição* e *geração de conceitos* referidos pela Felisberta parecem poder estar associados ao modo pensamento visual-espacial resultante da percepção.

No *episódio 9* seguinte é referida uma situação de aula do grupo 1 constituído pelo Delfim e pelo Abel, quando usavam o micromundo Tarta para construir a tarefa *flor*. Só me vou referir ao pensar visual-espacial do Delfim que era diferente do do Abel.

50 Abel: *pa, enter l, virar enter.*

(Ficam os dois alunos a pensar um pouco, olhando para a figura do ecrã, falam entre si, mas é indistinguível... Abel muda o passo do Tarta, teclou *l*, para mandar construir uma recta, com as setas de direcção escolhe os pontos por onde essa recta irá passar e manda virar. Aparece no ecrã a nova construção T14.



Abel fica tão contente que bate palmas e fica aos pulos a cantar. Delfim está muito calado, espantado com a alegria do colega e não muito crente no que via, e parecendo não perceber o pensamento do Abel. Este mexe com as mãos na cabeça e nos cabelos faz o movimento correcto com a mão no ecrã, para dar a indicação do movimento, direcção e sentido).

51 Abel: *Desliza para baixo*

(Sai para ir dar uma volta. Delfim então muda o passo para *cm*, fazendo aparecer a caixa de mudança do passo, faz o que colega lhe mandou, teclando *db* seguido de *enter* e surge-lhe a construção T15



e começa a gritar:)

52 Delfim: *Estás a ver, está mal, está mal, Abel... Estás a ver, estás a ver...*

Delfim começou por fazer o que Abel lhe indicou (parágrafo 51), depois porque não tinha acompanhado a dinâmica mental do colega (agia como um ventríloquista) ou não concordava com essa dinâmica (nada dizendo) quando construiu T15, usando o micromundo Tarta e viu que a figura obtida não estava embutida na estrutura da flor, gritou pelo Abel (parágrafo 52). O micromundo fez com que o Delfim falasse provocando o desvendar do pensamento visual-espacial do Delfim.

53 Abel: (Chega-se ao pé do computador, pensa uns segundos) *Não. Desliza para baixo.* (Simultaneamente faz um gesto com a mão para baixo.)

(Delfim tecla o que o colega lhe mandou, *db* e apareceu uma nova construção T16.)



54 Abel: *apa.*

55 Delfim: *apa* (indicando com o dedo que estava a perceber). *Agora sou eu que faço.*

Delfim continuou a fazer o que Abel ditava sem se saber se estava a perceber o que estava a fazer (descrição a seguir ao parágrafo 53). Delfim a partir de certa altura percebeu o raciocínio do colega e como continuar a tarefa e partilhou isso por meio de um gesto deíctico (parágrafo 55). Delfim fez a construção T17.



(Abel chama pela professora para lhe mostrar o que tinham feito enquanto Delfim continua a construir a *flor*, mudando o passo, para “ passo 1”, identificando recta em torno da qual iria virar o Tarta, e procurando os respectivos pontos para a recta de viragem ser traçada).

56 Delfim: *Ora vira, vira, vira.* (Delfim, cantarolando e fazendo gestos com a mão de contentamento, faz a construção T18.)



Delfim com toda a facilidade não só manipulou mentalmente as suas imagens PVMM (parágrafos 55 e 56) como não teve qualquer dificuldade em as traduzir na linguagem do micromundo Tarta, construindo a figura T18. Neste episódio os processos de pensamento associados ao pensar PVP do Delfim têm a ver com a *abstracção* (parágrafo 52). A *abstracção* emergiu no Delfim, a partir da sua acção sobre o micromundo e do *reconhecimento* de estruturas espaciais.

Num outro episódio, *episódio 10*, a investigadora referindo-se às figuras rectangulares dispostas horizontalmente na folha da tarefa V, perguntou à Ester qual delas era idêntica à figura no cimo da folha?

2 Ester: *Esta* (a figura rectangular mais da direita). *Porque o triângulo está assim e este também* (aponta para os dois triângulos mais pequenos da duas figuras).

3 Inv.: *Pronto. Só isso? Tens mais alguma justificação?*

4 Ester: *A bola está no maior e o quadrado está no mais pequeno.*

O pensamento visual-espacial da Ester parece resultante da percepção, contudo ela não identifica correctamente as semelhanças e diferenças entre objectos, isto é, não mostra ter a capacidade de *discriminação visual* (parágrafos 2 e 4).

7 Inv.: *Pensando da mesma maneira, qual destas três* (figuras quadrangulares) *é a mesma que a de cima* (figura A)?

8 Ester: *Esta* (figura C). *Porque a bola e os traçinhos estão virados para o mesmo lado.*

10 Inv.: *Há mais alguma razão?*

11 Ester: *A bola está aqui e aqui também* (compara as figuras A e C) *e o triângulo está sem nada*. A Ester encontrou algumas semelhanças em partes de figuras (parágrafo 11) e a partir daí inferiu igualdade para o global das configurações geométricas. Os processos de pensamento que acompanharam a Ester no seu modo de pensar foram fundamentalmente *avaliação de imagens* centrada em aspectos particulares.

Da análise destes dados, foi identificado o modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção. Associado a este modo foram exibidos os seguintes processos de pensamento: intuição primária (episódios quatro e oito), avaliação de imagens (episódios três, seis e dez), re-apresentação de imagem (episódio quatro), reconhecimentos visuais (episódios dois, cinco, seis, sete e nove), abstracção perceptual (episódio um e quatro), formação de um gestalt (episódio cinco), apreensão global de uma configuração geométrica (episódio sete), geração de conceitos (episódio oito). Foi ainda identificado o uso de uma metáfora pela aluna Felisberta, para a geração de conceitos (episódio oito).

5.1.2. *Modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens*

Os seis episódios seguintes permitem caracterizar o novo modo PVMM (resultado de se subdividir o modo PVMM/PVR) definido por operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens e identificar os processos mentais que lhe estão associados: intuições secundárias; unificações; transformações mentais (mudanças de posição e mudanças de forma); modelos mentais, abstracção reflexiva; generalização reconstrutiva, estruturação espacial, coordenação e construção visual.

Vejamos então o episódio 11 onde a investigadora pergunta ao aluno Abel, qual das três figuras rectangulares dispostas horizontalmente na segunda linha da folha da tarefa V é a mesma que a figura rectangular do cimo da folha.

2 Abel: *Esta* (Aponta para a figura do meio.)

3 Inv.: *Porquê?*

4 Abel: *Esta aqui está virada ao contrário*. (Abel gesticula com as mãos como estivesse a rodar).

O Abel começou por observar (percepção e interpretação de) imagens concretas que lhe foram dadas e depois pareceu *visionar a transformação* que uma figura sofreu (parágrafo 4) e o resultado de executar mentalmente essa transformação, gesto deictico (parágrafo 2) onde imagens antecipatórias e dinâmicas foram usadas, modo de pensar PVMM. A forma de transmitir o seu pensamento (descrição verbal, parágrafo 4) mostrou que ainda não dominava ou se não lembrava do vocabulário adequado ao contexto dos movimentos. Contudo, como integrou a descrição da sua

dinâmica mental factual com um gesto icónico (imagens cinestésicas para apoiar o seu pensamento), evidenciou com ele o seu pensamento correcto em relação à tarefa apesar de incoerente com a sua descrição verbal.

- 5 Inv.: *Se pensares da mesma maneira* (aponta as três figuras dispostas horizontalmente no fim da página), *qual destas três é a mesma que a de cima*, (figura A)?
- 6 Abel: *É esta* (aponta com força para a figura D).
- 7 Inv.: *Porquê?*
- 8 Abel: *Também está virado ao contrário.*
- 9 Inv.: *Para a colocares como esta* (figura A) *está, o que fazias?*
- 10 Abel: *Dava uma volta.* (Simula com a mão o movimento rodar.) *Punha esta* (o quadrado pequeno) *onde está esta* (quadrado pequeno da outra figura) *e esta* (círculo) *onde está esta* (círculo da outra figura).

Novamente o Abel *aplica mentalmente a transformação* anteriormente identificada a uma outra imagem, *prevê o seu resultado e compara-o* (parágrafo 6). O Abel mostrou de novo que não domina o vocabulário (parágrafo 8). Contudo, a descrição verbal de Abel ficou mais próxima do gesto icónico executado (parágrafo 10). Abel usou imagens cinestésicas (parágrafos 4 e 10) como os gestos icónicos evidenciam. O modo de pensamento visual-espacial do Abel parece então ser muito próximo do modo PVMM. O processo de pensamento aqui exibido é a *transformação mental* fazendo uso de imagens antecipadoras e dinâmicas.

O episódio que se segue, episódio 12, é a continuação do episódio 2 onde os alunos entraram em conflito sobre o caminho a prosseguir para a construção da tarefa *flor*, já que eles tinham reconhecido diferentemente a figura do ecrã como parte da *flor*. Os alunos gastaram muito tempo, para ultrapassar o conflito. O Delfim, apontando para a figura T10



do ecrã, resolveu então teclar *pa* para mudar o passo ao Tarta. Apareceu uma caixa, escreveu 30 na caixa e depois teclou *dd* seguido de *enter*. O Tarta deslocou-se e a figura T11 foi construída.



Abel fica pensativo. O facto de Delfim se ter lembrado de mudar o passo do Tarta para 30 foi crucial para a resolução da tarefa *flor*. Neste episódio 12, vou apenas me referir ao pensamento visual-espacial do Abel que começou por ser resultante da percepção, pois conseguiu ver a figura que estava no ecrã, T11, como parte da estrutura da *flor*.

- 36 Abel: *Okey.*

37 Abel: *Era para cima.*

38 Delfim: *Porquê?*

39 Abel: *É para cima.* (Faz os movimentos com a mão no ecrã a indicar o local onde deveria o Tarta ir e olha para a folha onde estava a tarefa).

40 Delfim: *Qual é?*

41 Abel: *É este e depois viras para baixo.* (Abel olha sempre para a folha da tarefa e na respectiva flor indica ao Delfim).

Abel *antecipou* as *transformações* que imagens dinâmicas do Tarta deviam sofrer e mesmo o respectivo resultado, *raciocínio transformativo*, (parágrafo 37 e 39) executando um gesto deíético no ecrã para indicar ao Delfim o resultado da transformação. Como o Delfim continuava a insistir nas razões do procedimento de Abel (parágrafo 40), este verbalizou o seu pensamento (parágrafo 41), não só repetindo qual o resultado daquela transformação anterior (“é este”) como *antecipando uma transformação daquele resultado* (“e depois viras para baixo”) complementando com um gesto deíético que apontava todas as transformações na folha da tarefa (parágrafo 41). O pensamento visual-espacial de Abel era resultante da manipulação mental de imagens e envolveu antecipações não só das transformações das suas imagens mentais, como dos resultados dessas transformações (*raciocínio transformativo*). A abstracção vivida pelo Abel é baseada nas suas acções conjuntas com as de Delfim sobre o objecto Tarta e surge das suas coordenações graduais. Os processos mentais associados ao modo PVMM do Abel são fundamentalmente as *transformações mentais* e *abstracção reflexiva*.

Vejam agora o *episódio 13*. A investigadora tinha ajudado os alunos Gil e Edgar do grupo 2 a construir a figura R13, parte da *flor*



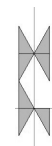
e depois deixou-os sozinhos. Entretanto eles não conseguiram fazer nada e passados uns minutos a investigadora novamente vai ajudá-los. Vou limitar a análise do episódio ao pensar visual-espacial do Edgar.

37 Inv.: *Pronto. Como é que tu queres? Por onde queres ir ?* (Com as mãos no desenho da *flor* na folha de trabalho a investigadora tentou que os alunos observassem e apontassem que parte do desenho já estava construído no ecrã e o que se deveria fazer em seguida. Depois, carrega em *l*, escolhe os pontos da linha de viragem e tecla *vira*, aparece então o desenho R14.)



38 Inv.: *Pronto. Agora faz tu.* (Vai-se embora. O Gil desinteressa-se e brinca com o rato.)

39 Edgar: *l* seguido de *enter*. (Edgar escolhe os pontos da recta de viragem, usando as setas de direcção e tecla *vira*. Aparece no ecrã R15.)



Depois tecla novamente *l*, escolhe os pontos da linha (recta) de viragem, agora linha horizontal e tecla *vira*. Aparece no ecrã R16.)



Pelas construções que Edgar construiu R15 e R16, infere-se que o seu modo de pensamento visual-espacial era resultante de manipulações mentais de imagens (parágrafo 39), onde *antecipações mentais* estiveram presentes, e foram também feitas *transformações mentais* de imagens (reflexão). As imagens mentais do Edgar foram antecipadoras e dinâmicas. A abstracção aqui vivida pelo Edgar é baseada nas suas próprias acções sobre o Tarta e surge das suas coordenações graduais. Ele antecipa a transformação reflexão como o seu resultado e executa depois essa transformação usando o Tarta, escolhendo a linha de viragem e coordenando os esquemas de acção do micromundo. Os processos mentais associados ao modo PVMM são fundamentalmente *transformações mentais* e *abstracção reflexiva*.

No episódio 14 que se segue, os pensamentos visual-espacial do Abel e Delfim pareciam ser os mesmos e fundamentalmente resultantes da manipulação mental de imagens. Abel pegou na folha da tarefa que continha a *flor*, mostrou-a ao Delfim e depois ambos foram compará-la com a figura do ecrã, T18



que tinha acabado de ser feita. Os dois alunos estavam envolvidos então em experiências de observação, percepção e interpretação, e de seguida o Delfim tomou a iniciativa:

60 Delfim: *Pois está bem, viramos aqui.* (Indicando no ecrã com a mão a linha de viragem.) *Põem-se aqui a linha.* (Com o dedo traça novamente no ecrã uma linha (recta) vertical, exactamente a vertical mais à direita que se pode imaginar traçar em T18.)

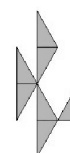
(A Professora chega e dá aos alunos alguma indicação que não se percebe, depois ficam novamente sósinhos, mas sem saber o que fazer. Depois enquanto Abel pensa como virar e aponta pontos possíveis para a linha de viragem, Delfim começa a teclar tentando procurar os pontos por onde a linha de viragem deve passar. Os dois alunos manipulam no ecrã o Tarta de papel para terem a percepção das linhas de viragem)

Ambos os alunos *transformaram mentalmente imagens*, e essa dinâmica mental foi verbalizada pelo Delfim que a complementou usando gestos deícticos (parágrafo 60). Entretanto a professora chegou e deu-lhes alguma indicação, que não se percebeu, depois ficaram novamente sozinhos, mas sem saberem o que fazer. Parece que a interrupção provocou uma quebra. Abel pensava como virar e apontava pontos possíveis para a recta de viragem. Delfim começava a teclar tentando procurar os pontos por onde a linha (recta) de viragem deveria passar. Depois os dois alunos, simultaneamente puseram-se de pé e foram manipular no ecrã um Tarta de papel (ferramenta para pensar) para terem uma melhor percepção da linha de viragem. Talvez se tivessem esquecido da linha de viragem já pensada.

61 Delfim: *Como se tira a linha, depois de se fazer?* (Faz o gesto de virar com a mão.)

62 Informático: *Depois de chamar o Tarta faz-se um refaz.*

Abel e Delfim retomaram a dinâmica mental anterior, modo PVMM porque constróiem a figura T19.



O Delfim teve também a preocupação de não deixar na *flor* nenhuma linha auxiliar e por isso pediu ajuda ao informático (parágrafo 61). Durante este episódio (parágrafo 60 e na construção T19) as imagens dos alunos eram imagens dinâmicas. Contudo perante um obstáculo eles esqueceram-se do que tinham já pensado e tiveram que se apoiar no pensamento visual-espacial resultante da percepção, talvez porque lhes era naturalmente mais básico. O processo mental associado ao modo PVMM exibido neste episódio é a *transformação mental* de imagens.

O próximo episódio 15 quer evidenciar a mistura do pensamento resultante de transformação mental de imagens com um pensamento visual-espacial que provem da percepção. A investigadora dá ao Delfim a folha da tarefa III com quatro pares de figuras e pergunta-lhe se aqueles pares de figuras têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

2 Delfim: *As duas primeiras são iguais.*

3 Inv.: *Têm a mesma forma e o mesmo tamanho, porquê?*

4 Delfim: *Esta aqui (a da esquerda) está virada, está numa forma diferente desta (a da direita).*

5 Inv.: *Numa forma diferente? Têm a mesma forma ou formas diferentes?*

6 Delfim: *Têm a mesma forma, mas estão em posições diferentes.*

7 Inv.: *Como colocas na mesma posição?*

- 8 Delfim: *Virava esta.* (Aponta para a da esquerda e com a mão simula o movimento rodar.)
Virava um quarto de volta.
- 9 Inv.: *Viravas? Davas uma cambalhota?*
- 10 Delfim: *Ah! Não. Rodava.*
- 11 Inv.: *E depois para ela ir para ali?*
- 12 Delfim: *Deslizava para trás.*
- 13 Inv.: *É para trás?*
- 14 Delfim: *Não, para a esquerda.*

Delfim usou *imagens dinâmicas*, como mostra a sua verbalização complementada por gestos deicticos (parágrafo 4). O Delfim foi conduzido pela investigadora a explicitar mais o seu pensamento resultante de *transformação mental de imagens*, como ilustrou o gesto icónico que representava uma imagem *cinestésica* (parágrafo 8) e a verbalização. O Delfim não estava suficientemente recordado do vocabulário do contexto geométrico ou talvez não estivesse muito habituado a descrevê-lo e assim a imagem cinestésica por ele correctamente representada foi discordante da sua verbalização. Esta era analítica também incompleta relativamente às características do movimento. Contudo com a ajuda da investigadora, foram identificado correctamente o movimento (parágrafo 10), bem como uma das suas características (um quarto de volta, parágrafo 8).

- 15 Inv.: *E estas duas?* (Referindo-se ao segundo par de figuras.) *Têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*
- 16 Delfim: (O aluno observa as figuras.) *Acho que não.*
- 17 Inv.: *Porquê?* (O Delfim torna olhar as figuras.)
- 18 Inv.: *Uma forma de veres é tentar colocar uma em cima da outra. Como o fazias?*
- 19 Delfim: *Virava.*
- 20 Inv.: *Em torno de que linha? Risca lá.* (O aluno traça a recta vertical ao meio da distância entre as figuras).
- 21 Inv.: *Achas que, ao virares, uma figura vai coincidir com a outra?*
- 22 Delfim: *Não. Acho que esta parte é maior que a outra.*

Primeiro, Delfim teve dúvidas na resposta e esta foi dada em função da sua percepção (parágrafo 16). Depois, dirigido pela investigadora, envolveu-se num pensar resultante de manipular mentalmente imagens. Identificou bem o movimento mas as características deste, só foram nomeadas parcialmente (parágrafo 19). Depois novamente apoiado, acaba por definir correctamente o movimento imaginado (virar). Contudo para Delfim o pensar usando a percepção tem muita força (parágrafo 22).

- 23 Inv.: *E estas duas* (referindo-se ao terceiro par de figuras) *têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*
- 24 Delfim: *Acho que esta (a da direita) é maior.*

25 Inv.: *Imagina que vais tentar sobrepor uma figura na outra, como o fazias?*

26 Delfim: *Virava.*

27 Inv.: *Em torno de que linha? Risca-a lá.*

(O aluno representa a recta horizontal que é o prolongamento do lado horizontal do triângulo mais à direita)

28 Inv.: *E depois?*

29 Delfim: *Deslizava para a esquerda.*

30 Inv.: *Já ficava no sítio?*

31 Delfim: *Não. Deslizava para baixo.*

32 Inv.: *Depois de fazeres isso, achas que são do mesmo tamanho ou não?*

33 Delfim: *Acho que não.*

Delfim deu agora a resposta relativa ao terceiro par de figuras, usando uma mistura de pensar resultante de manipulação mental de imagens (parágrafos de 26 a 31) com um pensar resultante da percepção (parágrafos 24 e 33) o qual esteve presente através de imagens concretas. Repare-se ainda que o movimento virar foi identificado e caracterizado correctamente para o segundo e terceiro par de figuras, graças à mediação da investigadora (parágrafos 20 e 27).

34 Inv.: *E estas duas? Em vez de estarem separadas estão juntas. Achas que têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*

35 Delfim: *Têm.*

36 Inv.: *Porquê? O que fazias para sobrepor uma em cima da outra?*

37 Delfim: *Primeiro deslizava para a esquerda, depois viro e deslizo.*

38 Inv.: *Achas que uma ficava em cima da outra?*

39 Delfim: *Não sei.* (Continua a observar as figuras.)

40 Inv.: *Que achas?*

41 Delfim: *Acho que sim.*

Delfim, para dar a resposta relativa ao quarto par de figuras, usou imagens dinâmicas, confundiu novamente o rodar com o virar e caracterizou de forma incompleta os movimentos (parágrafo 37). No global e na resposta a esta tarefa III, o Delfim misturou um pensamento resultante da *transformação mental* de imagens (parágrafo 37), com um pensamento visual-espacial que provem da percepção (parágrafos 39 e 41) e este último, parece que teve muita força. O processo de pensamento associado ao modo PVMM que se pode observar é o *de transformar mentalmente imagens*.

No episódio 16 quero exibir fundamentalmente a existência duma imagem metafórica no modo PVMM. A investigadora pergunta ao Carolino se está a ver a figura formada por doze quadrados que está na folha da tarefa IV (B) e ele responde:

2 Carolino: *Parece um tetris.*

- 3 Inv.: *O que é isso?* (A inv. não conhecia o jogo. É um jogo de computador com peças semelhantes a pentominos, que caem constantemente do cimo do ecrã. Para cumprir o objectivo do jogo é necessário rodar e deslocar lateralmente as peças.)
- 4 Carolino: *É uma bigamania que há, tem peças destas, umas mais largas outras mais pequeninas e tem aqui no meio um espaçinho para caber uma peça destas* (figura formada de três quadrados, dispostos na horizontal) *ou uma peça destas* (figura formada por três quadrados dispostos em L, mas invertida).
- 5 Inv.: *Então esta figura maior pode ser coberta por figuras como estas?... Podes usar as cores. Quando for uma figura igual a esta* (figura formada de três quadrados, dispostos na horizontal), *usas verde, quando for uma figura igual aquela* (figura formada por três quadrados dispostos em L, mas invertida), *usas laranja.* (O Carolino começou por pintar a figura verde e a investigadora diz:) *Aqui está uma. Ela é igual a esta?*
- 7 Carolino: *É.*
- 8 Inv.: *Porquê?*
- 9 Carolino: *Esta tem 3 quadradinhos e aquela também.*
- 10 Inv.: *Mas não parece igual.*
- 11 Carolino: *Não porque esta está nesta posição e esta está noutra.*
- 12 Inv.: *Como se chama esta posição?*
- 13 Carolino: *Horizontal.* (Refere-se aos três quadrados dispostos verticalmente.)
- 14 Inv.: *E esta?*
- 15 Carolino: *Diagonal.* (O aluno entretanto começa a pintar a outra peça).
- 16 Inv.: *Pronto. Há mais?*
- 17 Carolino: *Não. Mas pode-se fazer mais. Esta é uma peça do tetris, esta também é uma peça do tetris* (aponta a verde) *e esta também* (refere-se à figura maior).
- A resposta final do Carolino traduziu-se então no desenho da figura 5.8.

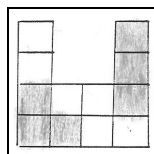


Fig. 5.8. Resposta do Carolino à tarefa IV(B).

O tal jogo “tetris” que o Carolino bem conhecia influenciou a execução da tarefa funcionando para ele como uma imagem metafórica onde as imagens do tetris funcionaram como peças dinâmicas. O Carolino ao observar o fundo da figura maior percepcionou ou melhor identificou as duas figuras mais pequenas *transformadas*: *uma rodada de 90° outra rodada de 180°*. O seu modo de pensar foi resultante da manipulação mental de imagens. Contudo para a

resolução completa da tarefa era necessário mais do que isso, era preciso que o Carolino tivesse construído mentalmente uma organização espacial para a figura maior de forma a identificá-la formada pela combinação de componentes espaciais que eram duas figuras de cada tipo das figuras mais pequenas que lhe tinham sido facultadas para ele observar (capacidade de estruturação espacial). Para isso o Carolino deveria arranjar mentalmente as figuras mais pequenas em posições convenientes umas em relação às outras e em relação ao todo. Os processos de pensamento associado ao modo PVMM evidenciados foram as *transformações mentais de imagens*.

Estes episódios acima mencionados revelam a identificação do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens. Associado ao modo PVMM foram exibidos os seguintes processos de pensamento: *transformações mentais* (em todos os episódios), *abstracção reflexiva* (episódios 12 e 13) e o uso de uma imagem metafórica (episódio 16).

5.1.3. *Modo de pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens*

Os dois episódios seguintes pretendem ilustrar e caracterizar o novo modo de pensamento PVR (resultado de se dividir o modo PVMM/PVR) definido por operações intelectuais relacionadas com a construção mental de relações entre imagens, a comparação de ideias, conceitos e modelos e identificar os processos mentais que lhe estão associados: intuições antecipatórias; comparações, descoberta de relações entre imagens, de propriedades e de factos; abstracção reflexiva; síntese e metacognição. O processo de *metacognição* vai ser entendido como regulação da cognição que inclui o planeamento antes de começar a resolver um problema, e avaliação contínua durante a resolução do problema (Schoenfeld citado em Dahl, 2004).

Vamos novamente examinar o *episódio 9* para analisar agora o pensamento visual-espacial do Abel. Os dois alunos estavam a resolver a tarefa *flor* e o Abel diz ao Delfim os comandos a executar:

50 Abel: *pa, enter, l, virar enter*.

(Ficam os dois alunos a pensar um pouco, olhando para a figura do ecrã, falavam entre si, mas era indistinguível ... Abel muda o passo do Tarta, como se pode ver pelo aparecimento da caixa, tecla *l*, para mandar construir uma linha, com as setas de direcção escolhe os pontos por onde essa linha irá passar e manda virar, apareceu a nova construção no ecrã T14).



(Abel fica tão contente que bate as palmas e põe-se aos pulos a cantar. Delfim está muito calado, espantado com a alegria do colega e não muito crente no que via, e parecendo não perceber o pensamento do Abel. Este mexe com as mãos na cabeça e nos cabelos faz o movimento correcto com a mão no ecrã, para dar a indicação do movimento, direcção e sentido).

51 Abel: *Desliza para baix.o*

(Sai para ir dar uma volta. Delfim então muda o passo para *cm*, fazendo aparecer a caixa de mudança do passo, faz o que colega lhe mandou, teclando *db* seguido de *enter* e surge-lhe a construção T15



52 Delfim: *Estás a ver, está mal, está mal, Abel....Estás a ver, estás a ver...*

O Abel pareceu envolvido num modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens (parágrafos 50 e 51) onde imagens dinâmicas e antecipadoras estiveram presentes. Ele descreveu essa sua dinâmica mental verbalizando (parágrafo 51) em simultâneo com a representação de uma imagem cinestésica (gesto icónico, descrição entre os parágrafos 50 e 51).

53 Abel: (Abel chega-se ao pé do computador, pensa uns segundos e diz:) *Não. Desliza para baixo.* (Simultaneamente faz um gesto com a mão para baixo.)

(Delfim tecla o que o colega lhe mandou, *db* apareceu uma nova construção T16 .)



54 Abel: *apa.*

55 Delfim: *apa* (indicando com o dedo que estava a perceber). *Agora sou eu que faço.*

O Delfim parecia perturbado com a figura que tinha construído segundo as indicações de Abel, T15 (parágrafo 52). Este veio examiná-la e ao fazê-lo, pareceu envolver-se num modo de pensamento resultante da construção de relações entre imagens, *modo PVR*. Repare-se Abel depois de pensar uns segundos (parágrafo 53) dá uma ordem ao colega com segurança. Talvez se possa induzir daqui várias coisas. Uma é que o Abel ao dizer ao Delfim “Não. Desliza para baixo” integrando também o respectivo gesto icónico (parágrafo 53) se envolveu em actividades de *construção de relações entre imagens*, de *raciocínio transformativo* (gerando imagens antecipadoras), de *planeamento mental da acção seguinte*, de

metacognição, sempre num processo onde imagens dinâmicas estiveram presentes com o fim de prever visualmente a construção de diferentes partes da *flor*. Uma outra análise pode ser a seguinte: Abel deu uma ordem ao Delfim (parágrafo 51) sem a ter planeado completamente ou talvez tivesse pensado que o Tarta activo era outro. Só depois de ser chamado pelo Delfim para examinar o que tinha acontecido é que foi avaliar as imagens construídas e estabelecer relações entre essas imagens. Quando Abel proferiu o segundo “deslizar para baixo” isso acarretou execuções mentais complexas (para o aluno Abel), resultantes de antecipações e de diferentes transformações. O Abel também integrou esta dinâmica mental com um gesto icónico que envolvia por tal abstracções elaboradas a partir da acção (abstracção pseudo-empírica), isto é, baseadas nas relações percebidas no micromundo Tarta. Os processos mentais observados neste modo PVR são: *descoberta de relações entre imagens, abstracção reflexiva, metacognição*.

Com o episódio 17 podemos aprofundar a descrição do modo PVR. A investigadora pergunta ao Gil, qual das três figuras rectangulares dispostas horizontalmente na folha da tarefa V é a mesma que a figura rectangular de cima?

2 Gil: *Esta* (indicando a figura do meio).

3 Inv.: *Porquê?*

4 Gil: *Se eu virar ao contrário.* (Simula rodar a mão.) *Isto aqui é a bola.*

5 Inv.: *Virar? É isso o que queres dizer? O que fazias à peça?*

6 Gil: *Rodar uma volta.*

7 Inv.: *Uma volta? Ficas no mesmo sítio.*

8 Gil: *Um quarto de volta.*

9 Inv.: *Rodavas um quarto de volta, e depois?*

10 Gil: *Rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho fica ali.*

11 Inv.: *Se pensares da mesma maneira, qual destas três figuras* (aponta as figuras dispostas horizontalmente no fim da página) *é a mesma que a de cima* (quadrado A)?

12 Gil: *Esta* (figura D) *rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho...* (Vai apontando).

13 Inv.: *Rodavas em torno de que ponto?*

14 Gil: *Em torno deste.* (Centro do quadrado.)

Pelos gestos e verbalizações observados parece que o modo de raciocinar do Gil estava próximo do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens. O Gil começou por *rodar mentalmente* uma imagem, como o gesto deietico o assinala (parágrafo 2). A respectiva descrição dessa dinâmica mental não esteve coerente com o gesto (parágrafo 4) e foi melhorada por alterações a essa descrição mediadas pela investigadora (parágrafos 5 a 10). O Gil também apontou *breves relações entre as imagens*

(parágrafo 10). Depois o Gil *transformou uma imagem, visionou o resultado dessa transformação rotação e comparou-o* (parágrafo 12), começando também a apontar *novamente relações entre as imagens* por gestos deiéticos (parágrafos 12 e 14). O pensar visual-espacial de Gil envolveu talvez o modo de pensamento PVR, se bem que ainda numa forma muito básica e pouco clara, quando expressava relações entre imagens (parágrafos 10, 12 e 14). Só usou uma vez uma imagem cinestésica quando se não lembrava do vocabulário adequado (parágrafo 4). As outras imagens eram imagens dinâmicas (parágrafos 3, 10 e 12). Os processos mentais observados neste episódio são: *transformações mentais, descoberta de relações entre imagens*.

O pensamento visual-espacial do Abel, no *episódio 9* revela um pensar visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens, modo PVR. Os processos mentais observados neste modo PVR são: *descoberta de relações entre imagens* (episódios 9 e 17), *abstracção reflexiva* (episódio 9) e *metacognição* (episódio 9).

5.1.4. Modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento

Os onze episódios seguintes querem caracterizar o modo PVE definido por operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos, e pretendem também identificar os processos mentais que lhe estão associados: representações, tradução, descrição da dinâmica mental, construção de argumentação, de conjecturas, uso de analogias.

Este modo de pensamento visual-espacial que está ligado à comunicação e representação, isto é, à exteriorização do pensamento, é uma espécie de condutor dos outros três modos de pensamento visual-espacial: PVP, PVMM e PVR. O modo PVE é um espaço cognitivo de acção, representação, construção e comunicação e num todo pode integrar componentes tais como o corpo, o mundo físico e a cultura. É ele que nos permite inferir a imagética e a dinâmica mental dos alunos e compreender obstáculos cognitivos que os alunos possam experimentar ao executar tarefas matemáticas. Não podemos directamente observar as representações internas de alguém, mas podemos antes fazer inferências sobre as representações internas baseadas em interacções, descrições verbais, gestos ou produção de representações externas. Em que extensão isso é feito ou posso tirar conclusões das acções ou das verbalizações dos sujeitos depende pelo menos da teoria implícita ou explícita do investigador.

Em todos os episódios já descritos, o modo PVE esteve presente de diferentes formas a que se associaram diferentes processos mentais. Os episódios que a seguir serão referidos,

foram escolhidos por me parecer revelarem particularidades que considero importantes. Sublinharei alguns desses pormenores. O modo de pensamento PVE parece ser de muita relevância para o desenvolvimento dos outros modos de pensamento visual-espacial, isto é, pode acontecer que certas capacidades e conhecimentos sejam necessários ao aluno para o desenvolvimento do modo PVE, e se o aluno não tem essas competências suficientemente desenvolvidas, ele poderá obscurecer a sua dinâmica mental ou mesmo poderá ter um sucesso fraco na tarefa que tem em mãos (episódios 19 e 20). Os modos de pensamento visual-espacial de dois alunos antes de serem sujeito ao ambiente de ensino e após o ambiente de ensino ao executarem a mesma tarefa (episódios 15, 21, 26 e 27) mostram diferenças assinaláveis. O pensamento visual-espacial duma aluna (executou a tarefa usando uma transparência como material manipulável, episódio 22) foi o resultado uma abordagem percepto-motora que envolveu acção e percepção e produziu aprendizagem baseada no mover e no ver. O modo PVE pode revelar as funções dos gestos: como ferramenta para pensar (episódio 18), como ferramenta para medir (episódio 23); como comunicação (partilha) através de gestos icónicos e deicticos (episódios 2 e 22); como auxiliar psicológico do aluno, gesto egocêntrico (episódio 25); como contribuindo para a construção social (episódio 24). O modo PVE ilustrou uma metáfora (metáfora do movimento) através do gesto dum aluno (episódio 2). O modo PVE revelou a capacidade de construção visual de (episódios 18 e 23) e a capacidade de coordenação (episódio 23) associadas ao modo PVMM.

No episódio 18 a investigadora mostra ao Abel a folha da tarefa II, onde estão lá desenhadas quatro peças e pergunta-lhe se com elas pode construir a casa que também está desenhada na mesma folha da tarefa.

2 Abel: *Vou fazer de cabeça.* (Tenta medir com os dedos o tamanho das diferentes figuras).

3 Abel: *Acho que sim.*

O pensar visual-espacial do Abel é resultante da percepção. Ele usou *os dedos* como ferramenta para pensar, talvez se possa classificar estes *gestos* como *icónicos* (tinham uma semelhança visual com um compasso de pontas). Abel *usou os dedos* para melhor perceber o tamanho das figuras (parágrafo 2).

4 Inv.: *Como é que tu colocas as peças?*

5 Abel: *Punha esta cá em baixo, rodava esta de 180° e punha aqui. Também rodava esta de 180°. Aquela punha-a aqui encostada* (Vai apontado as peças. Hesita... Está inseguro...). *Se calhar não consigo.*

Abel agora manipulou mentalmente as imagens, usando imagens dinâmicas. Abel *descreveu essa dinâmica mental*, exteriorizando o seu pensamento, *verbalizando* (parágrafo 5). Nota-se a preocupação de indicar a transformação bem como algumas das características dessa rotação. Repare-se ainda que o Abel não usou imagens cinestésicas, pois talvez já confiasse

no seu vocabulário para a *descrição da sua dinâmica mental* de forma analítica. Contudo, para ajudar a comunicação, usou digamos, *gestos deiéticos* traduzidos em (“esta cá em baixo”, “aqui”...). Finalmente o Abel manifesta dúvidas sobre o que estava a pensar.

6 Inv.: *Eu dou-te as peças. Se calhar tu tens razão.*

7 Abel: (Abel manipula as peças e não consegue construir a casa.) *Afinal não tenho razão. Não se pode fazer.*

Abel foi verificar a sua dinâmica mental construindo a casa, com peças iguais às das figuras da tarefa. O Abel depois de ter verificado que aquela manipulação das peças não levava à construção da casa poderia ter experimentado manipular as peças de outra maneira de forma a resolver a tarefa, mas não o fez. Ele generalizou e disse que não era possível. O pensar visual-espacial do Abel neste episódio evidencia o uso do modo PVE. O processo mental que está associado ao modo PVE é *descrição da dinâmica mental* a qual faz transparecer a capacidade de construção visual do Abel.

O *episódio 19* vem na continuação do episódio três. Os alunos Edgar e Gil tinham acabado de construir metade da espinha (figura 5.9) e vão prosseguir na execução da tarefa.

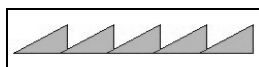


Fig. 5.9. Metade da espinha construída pelo Edgar e pelo Gil.

20 Gil: *E agora? Desliza?*

21 Edgar: *Desliza, não, vira.*

22 Gil: *Não*

(Ficam os dois alunos a olhar um para o outro, falam, inaudível e Edgar levanta-se vai ao ecrã e com o dedo indicador da mão esquerda no Tarta mais à direita do ecrã, movimenta o dedo para baixo na vertical e depois na horizontal para a esquerda e vai também comparar com a figura da folha de trabalho.)

23 Edgar e Gil: (Em simultâneo.) *É vira.*

(Edgar tecla *vira*, mas esquece-se de dizer em torno de que recta era a viragem e de carregar em *enter*. Nada se mexe, os alunos esperaram durante uns segundos e como nada acontece, Edgar carrega em *enter*. Aparece a figura 5.10 que era o resultado de o computador ter escolhido uma linha de viragem, mas que não era a adequada.)

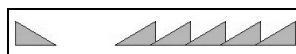


Fig. 5.10. Construção do Edgar.

Para resolver esta parte do friso Edgar usou um pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens. Repare-se que o Edgar usou um raciocínio transformativo, onde transformações sobre o Tarta foram mentalmente visionadas (imagens antecipatórias) bem como os seus resultados. O Edgar *executou também movimentos com o dedo, gestos icónicos*, para examinar os resultados dessas transformações (descrições depois dos parágrafos 22 a 23) e estes gestos precederam a expressão que lhe vinha associada *vira* (parágrafo 23). O pensamento visual-espacial do Gil estava um pouco escondido. Não se sabe se ele não dominava o vocabulário, ou se não manipulava mentalmente imagens, ou se não reconhecia os movimentos (parágrafos 20 e 22), parecia umas vezes um pouco desmotivado (descrição entre os parágrafos 25 e 26), mas outras ele evidenciava que o seu modo de pensar era PVMM pois *verbalizava* adequadamente o movimento virar, usava *gestos icónicos* para representar imagens cinestésicas (parágrafos 23, 24 e 28).

(Entretanto o Edgar foi apagando os Tartas um a um, com *apa*, até ficar no ecrã a figura R11.)



24 Gil: *Agora vira*. (Gil faz com a mão na folha de trabalho um movimento correspondente à direcção da viragem.)

25 Edgar: *apagatudo* e T *enter*.

(Aparece a figura R11.



Edgar fica sozinho a olhar para o ecrã durante alguns minutos, o Gil sai e passado algum tempo regressa. Entretanto o Edgar tecla sem qualquer resultado. Passados alguns minutos consegue novamente reconstruir no ecrã a figura 5.9. Edgar começa a chamar o informático:)

26 Edgar: *Senhor, ó senhor... Senhor senhor é aqui, como é que se faz?*

27 Informático: Como é que se faz para... ?

28 Gil: *para virar*. (Gil movimenta a mão direita para mostrar o virar.)

29 Informático: *Experimenta tirar aquele ponto...* (Foi teclando e falando e deixa no ecrã a construção R12



e com o polegar da mão direita aponta aos alunos o sentido do deslocamento do Tarta).

30 Edgar: *dd enter....* (Desliza três vezes e acabou a figura R13.)



31 Gil: *Era de outra cor*. (Olhando para a folha da tarefa.)

Para a construção da espinha os alunos tinham que lidar e relacionar esquemas geométricos, de programação e de acção. Toda a manipulação mental já feita pelos alunos poderia ter sido desperdiçada ou mesmo a tarefa não acabada, acarretando uma desmotivação para os alunos, por falha no conhecimento de certos factos necessários à exteriorização ou à tradução dos movimentos para a linguagem do micromundo Tarta, ou por falta de alguém que os fizesse relacionar as imagens pensadas e obtidas e lhes relembrasse os factos necessários para a prossecução da tarefa (conhecimento mediado por intervenção social). Isso não aconteceu, graças à estratégia do Edgar que chamou o informático para lhes resolver o problema, fazendo este o que eles precisavam (por magia, sem os fazer pensar) e encaminhando-os para o acabamento da espinha. O pensamento visual-espacial ligado à comunicação de cada aluno desta díade ocorreu associado ao processos de pensamento: *descrição da dinâmica mental*.

Noutro caso, investigadora convida a Dália a fazer o jogo do telefone, tarefa VIII (C) e vai lembrando os materiais que fazem parte do jogo, já que este *episódio 20* ocorre após a exposição dos alunos ao ambiente de ensino.

3 Inv.: *Tu levas esta folha e esta peça triangular. Esta peça encaixa exactamente aqui. O que é que a tua folha tem a mais que esta não tem?*

4 Dália: *Este triângulo.*

5 Inv.: *O jogo consiste em mandares uns comandos à tua amiga por forma que ela primeiro coloque a peça aqui, depois movimente a peça e ela fique exactamente como esta. A tua amiga só te vê, não te ouve. Podes treinar.*

6 Dália: *Primeiro colocas.*

7 Inv.: *Estás a treinar ou estás a falar com a tua amiga?*

8 Dália: *Estou a falar. Primeiro colocas o Tarta (chama Tarta ao triângulo) em cima da figura sombreada (vai simultaneamente manipulando correctamente a peça triangular) depois rodas meia volta no sentido contrário (ela roda um quarto de volta, fixando o centro de rotação) e depois viras.*

O pensamento visual-espacial da Dália, ao responder a esta tarefa, tem a ver com a manipulação mental de imagens. A exteriorização desse pensamento foi feita em simultâneo com a *manipulação manual de uma peça, verbalizando a acção*. Depois por solicitação da investigadora a Dália tornou a entrar no jogo e para transmitir o seu pensamento, e não usou qualquer manipulativo, para além braço (parágrafo 10).

9 Inv.: *Agora, és capaz de seres um bocadinho mais completa no que disseste? Vou-te exemplificar: disseste que rodas, mas não disseste em torno de que ponto... e depois quando disseste “vira”, não disseste em torno de que linhas ias virar assim (vira a peça em torno do cateto horizontal.) ou assim (vira a peça em torno do cateto vertical).*

10 Dália: (A Dália sem manipular qualquer peça, verbaliza o seguinte:) *Colocas a peça em cima da figura sombreada, depois rodas em torno do segundo pontinho, o pontinho à frente da*

figura sombreada, o centro... o vértice da figura sombreada, depois rodas meia volta, depois viras (faz o movimento com o braço para indicar a linha, isto é coloca o braço correctamente para simular o eixo de reflexão) em torno da linha, ah..., em torno de (olha para o tecto).

11 Inv.: *Como é que é essa linha?* (A investigadora refere-se à linha de reflexão anteriormente escolhida pela Dália. Esta olha para a figura.)

12 Inv.: *Essa linha é vertical ou horizontal?*

13 Dália: *Vertical.*

14 Inv.: *Como é que dizias?*

15 Dália: *Rodas em torno da linha vertical (hesitante) ah! Vertical recta.*

Ao descrever pela segunda vez a jogo do telefone, a Dália tropeçou em alguns obstáculos: a verbalização nem sempre foi concordante com as acções (parágrafo 8), descrição dos movimentos e da sua dinâmica mental foi incompleta (parágrafos 8, 10 e 15), trocou *virar* por *rodar* (parágrafo 15), não foi capaz de descrever relações espaciais. Pelas imagens cinestésicas, que podemos inferir a partir dos gestos icónicos observados (parágrafo 10) conclui-se a correcção da sua dinâmica mental e nota-se a dificuldade em coordenar sistemas de referência. Não se pode inferir da não existência de capacidades espaciais, poderá ser que a forma da comunicação não tivesse sido a mais adequada, contudo parece não estar bem visível a capacidade de *coordenação espacial*, capacidade de adoptar ou usar estruturas de referência: estruturas centradas no observador, estruturas centradas nos objectos ou estruturas centradas no ambiente, para organizar e descrever o seu pensamento. Ao modo de pensamento visual-espacial PVE da Dália esteve aqui associado o seguinte processo de pensamento: *descrição da dinâmica mental*.

No episódio 21 a investigadora mostrou ao Delfim os quatro pares de figuras que estavam na folha da tarefa III, e perguntou-lhe quais desses pares tinham a mesma forma e o mesmo tamanho. Depois repetiu a mesma pergunta para o primeiro par:

2 Delfim: *Não.*

3 Inv.: *Porquê?*

4 Delfim: (O aluno modifica a posição do corpo para observar melhor, toca com os dedos nas figuras.) *Têm.*

5 Inv.: *Porquê?*

6 Delfim: *Se este (o da direita) estivesse virado ao contrário (mexe com os dedos simulando rodar) tinha a mesma forma e o mesmo tamanho.*

7 Inv.: *E as de baixo?*

8 Delfim: *Não. Este é mais largo... Este é menos comprido. (Aponta.)*

9 Inv.: *E as de baixo?*

10 Delfim: *São.*

- 11 Inv.: *Aquelas têm a mesma forma e o mesmo tamanho? Risca lá com o teu lápis onde está uma.*
- 12 Delfim: *Têm. Porque... não sei explicar...*
- 13 Inv.: *Arranja lá as tuas palavras? Estão na mesma posição?*
- 14 Delfim: *Não.*
- 15 Inv.: *O que fazias para as pores na mesma posição?*
- 16 Delfim: *Cortava-as, depois mudava esta para cima, acho que ficavam iguais.*

O modo de pensar visual-espacial do Delfim é uma mistura do pensar resultante da percepção (parágrafo 8) onde predominou a discriminação visual, com o pensar resultante da manipulação mental de imagens, onde imagens dinâmicas estiveram presentes (parágrafos 6, 14 e 16). A *exteriorização* da dinâmica mental do Delfim foi fraca pois o vocabulário não estava adequado ao contexto das transformações geométricas e mostrava mesmo um desconhecimento das características dos movimentos rígidos bem como da sua identificação (parágrafos 12 e 16). Também na exteriorização do seu pensamento visual-espacial, integrou em simultâneo com a verbalização um *gesto icónico* (representando uma imagem cinestésica), mas havia incoerência entre eles (parágrafo 6). Neste episódio o processo mental associado ao modo PVE do Delfim é *descrição da dinâmica mental*.

No episódio 22 a investigadora dá à Carlota a folha da tarefa VIII (A) e pergunta-lhe o que é que ela vê?

- 2 Carlota: *Um L.*
- 3 Inv.: *Um L muitas vezes?*
- 4 Carlota: *Sim*
- 5 Inv.: *Esses L são todos iguais?*
- 6 Carlota: *Não*
- 7 Inv.: *Quais são os que são diferentes?*
- (A Carlota aponta os três Ls)
- 8 Inv.: *São diferentes em tamanho?*
- 9 Carlota: *Não.*
- 10 Inv.: *Em quê?*
- 11 Carlota: *Em contrário* (virou a mão).
- 12 Inv.: *O que queres dizer com isso? Não percebi muito bem.*
- 13 Carlota: (A aluna hesita.) *Estão ao contrário.*
- 14 Inv.: *Vamos ler o que nos pedem.* (Lêem em conjunto o enunciado da tarefa.)
- 15 Carlota: *A transparência é esta?* (A transparência tinha a figura do L colada. A Carlota coloca a figura da transparência sobre a figura a tracejado).
- 16 Inv.: *Queria saber como é que tu colocas esta figura exactamente no lugar desta?* (Aponta para a figura que estava na mesma linha horizontal da figura a tracejado). *Que movimentos fazias?*

(A Carlota vira a transparência)

17 Inv.: *O que fizeste à folha?*

18 Carlota: *Virei-a.*

19 Inv.: *E depois?*

20 Carlota: *Pu-la ali.*

21 Inv.: (A investigadora coloca a transparência sobre a figura a tracejado e pergunta:) *E para aquela?*

(A investigadora aponta a figura na diagonal relativamente à figura a tracejado. A Carlota arrasta a transparência).

22 Inv.: *O que fizeste à folha?*

23 Carlota: *Andei.*

24 Inv.: (A investigadora coloca novamente a transparência sobre a figura a tracejado e pergunta.) *E agora para esta?* (Refere-se ao L que ainda não foi analisado.)

(A Carlota rodou de 90° a transparência).

25 Inv.: *O que fizeste à folha?*

26 Carlota: *Virei.*

27 Inv.: *Viraste. Como é?*

28 Carlota: *Deitei.*

O pensamento visual-espacial da Carlota foi quase sempre resultante da percepção, ligado à manipulação de uma transparência, onde movimentos rígidos foram identificados pelas *acções* da Carlota sobre a transparência e *verbalizações* lhe foram solicitadas para que aqueles movimentos percebidos fossem descritos ou traduzidos (parágrafos 18, 23, 26 e 28). A Carlota desconhecia o vocabulário relacionado com os movimentos (parágrafos 11, 20, 23, 28), por isso há por vezes incoerência entre o movimento executado e a verbalização da acção (descrição entre os parágrafos 24 e 25 e parágrafo 26). A aluna fez um *gesto icónico* (imagem cinestésica) quando o seu pensamento visual-espacial era resultante de manipulação mental de imagens e não tinha ainda o domínio do vocabulário específico (parágrafo 11). A Carlota usou ainda gestos deícticos para comunicar (descrição entre parágrafos 7 e 8). O pensamento visual-espacial da Carlota revela neste episódio a existência do modo PVE. O processo de pensamento que lhe está associado é *descrição da dinâmica mental* que assumiu variadas facetas: acções, gestos e verbalizações.

O episódio 23 evidencia dois processos cognitivos ligados à manipulação mental de imagens: a construção visual e coordenação postos a descoberto pelos processos de pensamento associados ao modo PVE. Os alunos Abel e Delfim do grupo 1 estavam a resolver a tarefa *espinha* que consistia em usar o micromundo para construir a figura 5.11.

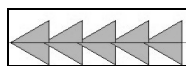


Fig. 5.11. Espinha.

(Delfim tinha cometido uma pequena falha ao teclar.)

- 7 Delfim: (Gesticula com a mão direita no sentido de minimizar o erro, não responde e tecla *apa* aparecendo então a figura T3



e novamente Delfim gesticula, mostrando alegria.)

(Delfim e Abel com a folha da tarefa na mão, planeam o que fazer. Abel primeiro coloca o dedo no Tarta mais à esquerda da espinha da folha de tarefa, movimentando esse dedo virando-o de cima para baixo e depois desliza na horizontal o dedo da esquerda para a direita apontando assim ao Delfim os movimentos a que o Tarta deveria ser sujeito. Depois Abel compara, usando os dedos como fossem pontas dum compasso, o comprimento do cateto maior do Tarta do ecrã, com a distância entre os Tartas na folha da tarefa. Abel dobra ainda a folha da tarefa para se certificar que a linha de viragem era a horizontal e disse “cm” para o Delfim. Depois ambos os alunos com os dedos no ecrã, a conversar, deslizam os dedos na horizontal para a direita, Delfim, e para a esquerda, Abel, de forma a medir o ecrã e saber se se deveria movimentar os Tartas para a direita ou para a esquerda e a figura caber toda no ecrã. Resolveram apagar tudo e começar de novo).

- 8 Abel: *limpatudo e t enter*. (Aparece T4.)



Neste episódio passado na aula, o pensamento visual-espacial do Abel resultou da integração do pensar ligado à manipulação mental de imagens, com o pensar visual-espacial resultante da percepção. Abel envolveu-se primeiro em raciocínio transformativo, já que executou mentalmente e fisicamente um conjunto de operações sobre um objecto (o Tarta) que permitiu que fossem visionadas as transformações que esse objecto deveria sofrer e o conjunto dos resultados dessas operações como pode ser inferido dos *gestos icónicos* representando imagens cinestésicas (descrição entre os parágrafos 7 e 8). Os alunos evidenciaram depois um pensamento visual-espacial resultante da percepção, usaram gestos com os dedos como artefacto ou prótese para medir e perceber o comprimento do passo do Tarta *cm*. Também o Abel percebeu a linha de viragem, quando dobrou a folha da tarefa. No global, os alunos evidenciaram a capacidade de construção visual que envolveu antecipação, selecção e experimentação. Finalmente o Abel e o Delfim foram produzir a *espinha*, figura 5.11, sem qualquer dificuldade, evidenciando assim o uso do *modo PVE*, onde tiveram que aplicar e coordenar conjuntamente esquemas geométricos, espaciais, de programação e de acção, já previamente pensados. Os processos de pensamento associados ao modo PVE observados

foram fundamentalmente: *representações, descrição da dinâmica mental* (gestos e verbalizações). Estes processos de pensamento puzeram a descoberto as seguintes capacidades dos alunos: construção visual e coordenação.

Com o *episódio 24* pretendo evidenciar a função social dos gestos. Os alunos Edgar e Gil do grupo 2 construíram a figura. 5.12 ajudados pela investigadora, usando o micromundo Tarta. Depois esta pergunta-lhes:

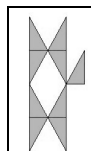


Fig. 5.12. Construção do Edgar e do Gil para a tarefa *flor*.

56 Inv.: *O que falta?*

57 Gil: *Vira.*

58 Edgar: (Assinalou com o dedo no ecrã o movimento virar).

(A investigadora em colaboração com os dois alunos tecla *l*, usa as setas de direcção para assinalar dois pontos da linha de viragem e tecla *vira*. Aparece R23).



59 Inv.: *E agora para fazer a outra parte como é que eu faço?*

(A investigadora pega na folha de trabalho e os três a observam. A investigadora selecciona com as mãos apontando partes da *flor* tentando que os alunos reconhecessem linhas de simetria...)

Neste episódio que é uma pequena parte da construção da *flor* o grupo anteviu a transformação que era preciso executar ao Tarta, como nos mostra a verbalização do Gil (parágrafo 57) e o gesto icónico do Edgar representado por uma imagem cinestésica (parágrafo 58). Posteriormente os dois alunos com a ajuda da investigadora foram *traduzir* as suas dinâmicas mentais em linguagem do micromundo e daí surgiu a construção visual R23. Assim o pensamento visual-espacial dos alunos do grupo 2 foi socialmente vivido sob a mediação da investigadora. Em seguida o grupo foi convidado pela investigadora a começar a reconhecer linhas de simetria na estrutura da flor, portanto o grupo estava a ser orientado para um modo de pensar (social) resultante da percepção, modo PVP. Os gestos usados pela investigadora (descrição após o parágrafo 59) pretendiam ajudar os alunos no desenvolvimento de significados e de conhecimentos necessários para a execução da tarefa. Graças ao seus gestos e verbalizações, a investigadora pretendia que o conhecimento fosse

percebido e vivido socialmente pela grupo. Neste episódio revela-se o uso pelos alunos do *modo PVE* e o processo mental que lhe está associado é: *descrição da dinâmica mental* (gestos e verbalização).

No episódio *episódio 25* pretendo ilustrar o gesto como auxiliar psicológico. Delfim e Abel, em colaboração, tinham construído usando o micromundo Tarta, a figura 5.13, parte da tarefa *flor*.

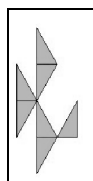
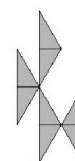


Fig. 5.13. Parte da flor construída por Abel e Delfim.

(Depois, enquanto Abel observa, Delfim está ao teclado, por vezes discordam e quase sem ajuda do Abel, o Delfim faz a construção T20 usando o movimento virar.)



63 Delfim: (Quando acaba de construir T20.) *Estás a ver como ia bem.*

(Agora trocaram os papéis e Delfim dizia o que Abel devia fazer e este teclava)

64 Delfim: *Nesta linha aqui* (aponta no ecrã a linha horizontal imaginada que passa no meio da figura *flor*) *viras. Não é?*

65 Abel: (Abana com a cabeça em sinal de concordância.) *Sim.*

(Abel fica sozinho a definir a linha em torno da qual o Tarta iria virar, entretanto acontece algo na sala que o fez levantar para verificar ... Depois, quando regressa ao lugar, manda *virar* e aparecer um triângulo na construção T21



que ele não tinha previsto, pois provavelmente tinha mentalmente trocado o Tarta que estava activo e grita:)

Os dois alunos viviam os mesmos modos de pensamento visual-espacial, construíram T20 e T21 de acordo com o seguinte esquema: um pensa como fazer as figuras (modo PVMM) e descreve (modo PVE) e o outro usa o micromundo para a construção (modo PVE), depois trocam os papéis. O modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens foi

socialmente vivido pelo grupo (talvez porque o Delfim não tem muita confiança nele e precisa da confirmação do Abel, parágrafos 64 e 65). O Abel executa o que Delfim lhe ditou, vai ver o que está a perturbar a aula e quando retoma a tarefa provavelmente tinha esquecido qual o Tarta que estava activo.

66 Abel: *Ah!!!* (Simultaneamente põe a mão na boca.)

67 Delfim: *O que é?*

(Abel tenta explicar o que aconteceu, usando também as mãos ... não se percebe o que diz ... Em seguida desfaz e muda o passo de 1 e torna a fazer de novo T21 para se poder ver melhor. Quando acabou dá um grito de satisfação e deixa o Delfim a continuar a tarefa. Este continua o trabalho de Abel mexe um pouco, não faz nada de novo e começa a chamar o colega.)

Abel espantou-se que o resultado da viragem do Tarta em torno da linha horizontal fosse o que o computador assinalava. Assim a figura construída causou-lhe digamos um conflito cognitivo e soltou uma exclamação levando simultaneamente a mão à boca. Este *gesto*, muito rápido de espanto, revela discordância entre o encontrado e o previsto, evidencia mais claramente o uso de imagens antecipatórias que quase não tinha sido revelado (parágrafo 65). O *gesto* não era para ser comunicado, era dirigido ao próprio aluno, designemo-lo por *gesto egocêntrico*, era uma expressão, aviso ao discurso interior do Abel para mostrar divergência entre o seu pensamento lógico, a sua manipulação mental e a sua exteriorização através do micromundo Tarta. Depois Abel não conseguiu explicar o acontecido, e deixou-se ficar sem perceber, mas à cautela foi mudar o passo do Tarta de 1, talvez porque sabia que este passo lhe tinha provocado problemas. Repare-se que o gesto do Abel do parágrafo 65, é de natureza completamente diferente, é específico dum diálogo, é redundante porque mistura gesto e fala. O gesto *deiético* de Delfim teve por função partilhar comunicação, indicava um objecto e complementava a verbalização de Delfim (parágrafo 64). Os pensamentos visuais-espaciais do Abel e Delfim evidenciam o uso do *modo PVE* neste episódio. Os processos de pensamento que estão associados ao *modo PVE* são aqui fundamentalmente: *descrição da dinâmica mental* através de gestos e fala e *tradução* (conversão dessa dinâmica mental para a linguagem do micromundo).

Vamos neste momento fazer mais análises sobre as transcrições do *episódio 2*, mas examinando agora os mecanismos conceptuais gestos e metáforas, que lá foram vividos e que tinham diferentes significados e funções. Abel usou um gesto *deiético* ao apontar para um triângulo para *comunicar* (partilhar) algo de estranho que percepcionou, e chama pela professora (o gesto não é redundante com a fala, talvez se complementem).

4 Abel: *Ó Professora estes Tartas ...* (Aponta um triângulo, não se percebe...)

(Aparece o informático, os dois alunos falaram para ele, inaudível,... o informático coloca a folha da tarefa junto do ecrã para que os alunos pudessem comparar melhor as imagens, e nada diz).

5 Delfim: *Ai é assim?*

6 Abel: *Aqui é o ponto...*

(Não se percebe o que dizem, ficam sozinhos, a olhar um para o outro. Abel arrasta para cima o seu dedo sobre o ecrã, põe as mãos na cabeça e com a mão direita sobre o ecrã, roda-a para a esquerda, indicando ao colega o movimento a que deveria ser submetido o Tarta e diz)

7 Abel: *Vira isso.*

(Delfim começa a teclar e relembra e emenda o Abel ameaçando-o de pancada com o dedo indicador da mão direita).

Depois Abel gesticulou novamente (descrição entre os parágrafos 6 e 7), gestos *icónicos* (semelhanças visuais com os movimentos), para representar os movimentos a que o Tarta deveria ser submetido. Abel ainda não estava bem familiarizado com o discurso apropriado ao contexto e usou (agarrou) o termo “vira isso” para descrever o movimento, que não coincidia com o gesto. O gesto representava uma imagem cinestésica. Delfim percebeu o que o Abel queria comunicar e como estava já mais familiarizado com o vocabulário do contexto, fez um gesto social, que talvez não o possa inserir na classificação dos gestos de McNeill (Roth, 2001) “ameaçando-o de pancada com o dedo indicador da mão direita”, uma meio de o avisar que ele estava errado e disse *rodar* seguindo-lhe o teclar deste comando. Delfim não interpretou bem o que a caixa de erro lhes queria dizer e substituiu *rodar* por *roda* (daí se seguiu um caminho diferente para a execução da tarefa). Mais tarde (descrição depois do parágrafo 11) Abel usou então um gesto *icónico* para apontar o sentido da construção da *flor*, e a sua fala seguinte indicava qual era a parte da *flor* por onde se devia começar.

11 Abel: *l, enter e vira.*

(Abel tecla *l*, escolhe dois pontos para construir uma linha, e depois disso, tecla *vira* e o Tarta foi virado em torno dessa linha. Assim foi obtida a figura T4.



Agora Abel pega na folha da tarefa e mostra-a a Delfim, os dois comparam a figura da folha da tarefa com a do ecrã, T4. Abel indica com o dedo como deviam continuar a construir, para a direita.)

12 Abel: *Isto está para a primeira.*

13 Delfim: *Não, Não. Agora tem de se* (com um dedo da mão direita aponta no ecrã a figura e assobiando aponta agora na direcção da sua esquerda, a oposta do colega. Continuam a discutir e o Delfim simula virar com as mãos...)...*e depois vira com este.* (Delfim aponta para a figura T4 do ecrã.)

14 Abel: *Não...* (Abel mexe no ecrã com a mão para a direita e abre a mão no ecrã). *Podes ficar aqui.*

15 Delfim: *Não...* (Aponta no ecrã com a mão a outra direcção para construir a figura.)

16 Abel: (Abel diz qualquer coisa inaudível...) *Pois se deixarmos...* (mexendo com as mãos no ecrã).

Também Delfim usou vários gestos para convencer o Abel. Primeiro um gesto *deiético* a apontar com o dedo no ecrã a figura T4 (parágrafo 13). Um segundo gesto *icónico* foi observado quando assobiando apontava para a sua esquerda, queria mostrar o sentido da construção da *flor*. Delfim explicou o que deveria ser feito (na ausência de discurso apropriado) com um gesto “assobiando apontou na direcção da sua esquerda” que parece traduzir uma *metáfora do movimento* e evidenciar uma forma *transformacional* de pensar. Finalmente um terceiro gesto de Delfim, *gesto icónico* (usou uma imagem cinestésica) para simular um virar, verbalizando simultaneamente esse pensamento (gesto redundante com a fala). De seguida Abel fez um novo gesto *icónico* para representar o espaço que a *flor* iria ocupar (parágrafo 14). Mais dois gestos análogos aos anteriores, um para o Abel outro para o Delfim, podem ser verificados, evidenciando com isso falta de diálogo entre os dois alunos. Nesta perspectiva de análise, este episódio exemplifica o aparecer do modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento, *modo PVE* que traz associado aos seguintes processos de pensamento: *descrição da dinâmica mental* (verbalizações e gestos) e *metáfora*.

Com os dois episódios seguintes quero evidenciar a evolução do modo de pensamento visual-espacial do Abel para a mesma tarefa, antes e depois do ambiente de ensino. No *episódio 26* a investigadora pergunta ao Abel se os pares de figuras que estão na folha da tarefa III têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

2 Abel: *Estas aqui de cima*. (O aluno aponta para o primeiro par.)

3 Inv.: *Porquê?*

4 Abel: *Este está deitado* (aponta a figura da esquerda) *e este* (apontando) *está em pé*.


5 Inv.: *O que fazias a este para o pares de pé?*


6 Abel: *Punha-o de pé*.

7 Inv.: *Pronto. E estas duas* (referindo-se ao segundo par), *achas que elas têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*

8 Abel: *Não*.

9 Inv.: *Porquê?*

10 Abel: *Esta parte aqui* (aponta um dos lados verticais da casa ) *parece maior do que esta*

(aponta o correspondente na outra casa ) *e esta* (aponta o maior lado da primeira casa) *do que esta* (aponta o correspondente na outra casa).

11 Inv.: *E estas duas?* (A investigadora aponta para o terceiro par de figuras.)

12 Abel: *Têm*.

- 13 Inv.: *Porquê?*
- 14 Abel: *Parecem-me iguais só que estão viradas ao contrário.*
- 15 Inv.: *Como viravas para pôr direito?*
- 16 Abel: *Punha o traço cá em baixo e o bico cá em cima.*
- 17 Inv.: *E estas duas aqui, (aponta para o quarto par de figuras) achas que têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*
- 18 Abel: *Acho que sim. Elas parecem parecidas com as do primeiro par. Se as despegarmos ficam as duas iguais.*
- 19 Inv.: *Encaixam uma na outra?*
- 20 Abel: *Sim.*
- 21 Inv.: *Como?*
- 22 Abel: *Juntamos como aqui está.*

Neste episódio o Abel ainda não tinha sido sujeito ao ambiente de ensino quando respondeu à tarefa III. O pensamento visual-espacial do Abel é uma mistura do modo de pensamento resultante da percepção, fundamentalmente ligado à *discriminação visual*, (parágrafos 10 e 18) e, do resultante da manipulação mental de imagens onde imagens dinâmicas parecem estar presentes (parágrafos 4 e 14). Na exteriorização do seu pensamento visual-espacial, usou sobretudo gestos deicticos (parágrafos 4, 10, e 16) para complementar a descrição da sua dinâmica mental cujo vocabulário não foi na maior parte das vezes, adequado ao contexto da geometria transformacional (parágrafos 6, 16, 18 e 22). O modo PVE envolve a *descrição factual da dinâmica mental*, como processo mental associado, baseada fundamentalmente em verbalizações e gestos

A investigadora questiona novamente o Abel relativamente à tarefa III, episódio 27, mas agora após o ambiente de ensino, e referindo-se ao primeiro par de figuras ela pergunta-lhe se têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

- 2 Abel: *Estes têm. Eles são a mesma figura, só que rodaram-na.*
- 3 Inv.: *Se quisesse colocar a figura (aponta para a da direita) sobreposta com aquela (aponta para a da esquerda) que movimentos farias?*
- 4 Abel: *Rodava 90° no sentido contrário aos ponteiros do relógio e deslizava para a esquerda.*
- 5 Inv.: *E estas duas? (Aponta o segundo par.) Achas que têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*
- 6 Abel: *Acho.*
- 7 Inv.: *Porquê?*
- 8 Abel: *Parecem iguais.*
- 9 Inv.: *Se quisesse sobrepor, pois assim todas as dúvidas desaparecem... O que fazias?*

- 10 Abel: *Deslizava esta* (aponta a casa da direita) *para a esquerda até ficar encostada aqui* (o lado vertical esquerdo da casa da direita encostava com o lado vertical direito da casa da esquerda) *e depois virava.*
- 11 Inv.: *Viravas em torno de que linha?*
- 12 Abel: *Deslizava até aqui primeiro e depois virava.* (Abel aponta “o lado vertical direito da casa da esquerda”)
- 13 Inv.: *Então a linha em torno da qual viravas é esta?*
- 14 Abel: *Sim. Sim.*
- 15 Inv.: *E as figuras de baixo?* (Refere-se ao terceiro par de figuras.)
- 16 Abel: *Têm a mesma forma e o mesmo tamanho.*
- 17 Inv.: *Se quisesses sobrepor, o que farias também?*
- 18 Abel: *Rodava esta* (aponta a figura da esquerda) *de 180° e deslizava para a direita.*
- 19 Inv.: *E as duas figuras de baixo?*
- 20 Abel: *Têm a mesma forma e o mesmo tamanho.*
- 21 Inv.: *Se quisesses sobrepor, o que farias?*
- 22 Abel: *Rodava este* (figura mais em baixo) *de 180° e deslizava para a esquerda, não, deslizava para cima.*

O pensamento visual-espacial do Abel estava fundamentalmente ligado à manipulação mental de imagens, onde estiveram presentes imagens dinâmicas (parágrafos 2, 4, 10, 12, 18 e 22). Na exteriorização do seu pensamento visual-espacial, ele descreveu a sua dinâmica mental, *verbalizando* e usando *gestos deicticos*, acompanhando por “esta”, “aqui” (parágrafos 10 e 12) para complementar as suas descrições. A sua dinâmica mental estava correcta, o vocabulário adequado ao contexto das transformações geométricas ainda que um tanto incompleto relativamente à caracterização das diferentes isometrias: nas rotações nunca se referiu ao centro de rotação (parágrafos 4, 18 e 22), nas translações omitiu a direcções dos deslizamentos (parágrafos 18 e 22) ou mesmo a direcção e o sentido (parágrafo 12) e nas reflexões indicava as linhas de viragem só porque lhe era solicitado (parágrafo 11). O Abel também não mostrou saber coordenar diferentes sistemas de referência para completar as suas descrições. O processo de pensamento observado no *modo PVE* do Abel é fundamentalmente uma *descrição analítica da dinâmica mental*.

Os onze episódios atrás mencionados evidenciam o modo de pensamento visual-espacial dos alunos que está ligado à transmissão/comunicação e representação, isto é à exteriorização do pensamento, *modo PVE*. Os processos de pensamento que se observaram associados ao modo *PVE* foram: *descrição da dinâmica mental através de verbalizações* (em todos os episódios, e podia ser denominada *factual* ou *analítica*, episódio 26 e 27

respectivamente), de *gestos* (em quase todos os episódios), *tradução* (episódio 25) e *metáfora* (episódio 2).

5.2. Dimensão sócio-cultural do pensamento visual-espacial

Esta secção diz respeito à segunda questão do modelo teórico inicial (Cap. IV) que pretende examinar como os modos do pensamento visual-espacial dos alunos foram influenciados pela dimensão sócio-cultural na aula. Debruçar-nos-emos sobre as transcrições de vídeos relativas às execuções de tarefas geométricas de dois pares de alunos em actividades de aula e usando o micromundo Tarta. Os modos de pensamento visual-espacial dos alunos foram vividos na aula e ocorreram em interacções nas díades (grupos 1 e 2), da intervenção da investigadora e das suas interacções com o micromundo Tarta. Os alunos do grupo 1 considerados pela professora como alunos bons relativamente à Matemática, executaram as tarefas *espinha* e *flor* só com o apoio do micromundo Tarta e das interacções do próprio grupo. Os alunos do grupo 2, considerados pela professora como alunos médios-fracos relativamente à Matemática, acabaram a tarefa *espinha* e não acabaram a tarefa *flor*. O que conseguiram construir foi francamente sustentado pela intervenção da investigadora, fundamentalmente na execução da tarefa *flor*. No processo de análise vão ser usadas ideias de Vygotsky fundamentalmente a *mediação*, a *zona de desenvolvimento proximal* e a *apropriação*.

As *interacções entre alunos*, a *intervenção da investigadora* e as *interacções com o micromundo Tarta* irão ser examinadas em episódios, com ênfase no averiguar em que medida o micromundo Tarta poderá ser considerado um instrumento potencial de mediação semiótica. Os artefactos, objectos particulares com características intrínsecas, concebidos e construídos de forma a executarem uma tarefa particular, têm uma função dupla: eles são externamente orientados com o fim de executarem uma acção ainda eles estão também internamente orientados com o fim de controlarem a acção. Analisando o funcionamento dum artefacto, ele torna-se por um lado um instrumento quando pode apoiar a construção interna de significados relacionada com os esquemas de utilização desenvolvidos pelo aluno. Por outro lado, o artefacto, actuando como mediador entre alunos e professor, pode ser usado pelo professor para explorar estratégias de comunicação com o fim de guiar a evolução de significados dentro da comunidade da sala de aula. Em outras palavras, o artefacto pode funcionar como um *mediador semiótico* (Mariotti, 2002).

Episódios vão então ser distribuídos ficticiamente pelas três mediações acima referidas, pretendendo-se assim evidenciar cada uma delas. Os Quadros 5.1 e 5.2 querem

sobressair o social com as suas diferentes evoluções em cada grupo, para a execução da tarefa *flor* e procurar possíveis relações com os modos de pensamento visual-espacial dos alunos.

5.2.1. Interações entre os alunos das díades

Vamos situar as nossas análises novamente no episódio 2 e depois examinaremos o episódio 28. Os pensamentos visuais-espaciais do Abel e do Delfim eram resultantes da percepção (parágrafos 12 e 13). O diálogo entre os dois alunos fora feito muito por gestos (parágrafos 12 a 17), talvez pelo facto de não dominarem bem o vocabulário adequado. Esses gestos têm funções antecipatórias e permitem identificar nos dois alunos um modo de pensar resultante da manipulação mental de imagens. Possuem também um carácter social na medida que pertencem ao espaço circundante do Abel e do Delfim que estão interagindo (parágrafos 14 a 17). A partir do parágrafo 16, teria sido importante a mediação dum adulto para fazer com que eles falassem entre si sobre o que estavam a pensar e qual a opção a tomar. Entretanto Abel teclou *apa*, a figura não se modificou, os dois alunos apontavam no ecrã, como queriam que a figura se movesse, continuavam a não se entender, apareceu outra caixa de erros, resultante de Abel continuar a teclar e Delfim diz:

Episódio 28: O grupo 1 e a tarefa *flor*

20 Delfim: *Ai, não... Mas agora não fica bem.*

(Há uma disputa pelo teclado e Delfim parece que queria riscar com os dedos a figura T4,



continuam a falar, o Abel falou e com a mão indica a direcção em que queria que o Tarta se movesse. Discutiam. Delfim começa a teclar ... mas não constrói mais do que já tinha antes. Abel observa novamente a folha da tarefa durante um certo tempo, e Delfim ia começar a falar ...)

21 Abel: *Espera, espera.* (Abel continua a observar a figura e a pensar, Delfim entretanto vai mexendo nas teclas.)

22 Abel: *Agora “dd”.* (Retomam o conflito antigo relativo qual a direcção a tomar para a construção da flor.)

23 Delfim: *Não.*

24 Abel: *Sim. Sim.*

25 Delfim: *Não, de, é melhor...*

(Começam a discutir e Abel usando a mão direita, indica no ecrã o caminho que queria.)

26 Delfim: *eu sei.* (Delfim tecla *de* e um Tarta deslocou-se para a esquerda mas não a quantidade que ele queria, figura T5 .)



27 Abel: *Oh!!!* (Delfim deixa agora o colega usar o teclado.)

28 Abel: *desfaz* seguido de *enter*. (Abel apaga a última figura feita com *desfaz* e aparece no ecrã a figura T6.)



29 Delfim: *Para quê?*

30 Abel: *É melhor*. (Abel começa a teclar *dd*, mas teve o mesmo problema agora à direita, pois o Tarta desloca-se uma quantidade que não servia, figura T7.)



31 Delfim: *Deixa estar*

(Abel apaga a figura feita com *desfaz*, apareceu T8)



e mostra Delfim a figura da folha da tarefa, dizendo algo... inaudível. Delfim começa a teclar, torna a teclar *de* e o Tarta desloca-se novamente para a direita mas novamente não a distância que ele queria, figura T9.)



32 Abel: *Para quê? Põe lá desfaz*.

33 Delfim: *Desfaz?*

Cada aluno parecia ter a mesma autoridade no grupo, mas esta era perdida pelo “feedback” dado pelo micromundo (parágrafos 27 e 31). O Delfim parecia não conhecer bem os comandos do micromundo (parágrafo 33). As regras explícitas ou implícitas do uso do micromundo ainda não estavam interiorizadas pelo grupo, por isso havia disputa para usar o teclado (descrição a seguir ao episódio 20).

34 Abel: (abana com a cabeça afirmativamente) *Desfaz*

(Delfim demora um pouco a apagar, aparece T10)



e seguem-se alguns momentos, onde estão quietos, depois um deles parece querer levantar-se).

35 Delfim: *Estás a ver?*

(Apontando para a figura T10 do ecrã, o Delfim resolve então teclar *pa* para mudar o passo ao Tarta, aparece uma caixa e escreve 30 na caixa e depois tecla *dd* seguido de *enter* e o Tarta desloca-se, a figura T11 foi construída.)



(Abel fica pensativo, olhou para a folha da tarefa e diz:)

36 Abel: *Okey.*

37 Abel: *Era para cima.*

Nenhum aluno do grupo dominava, tinham ambos o mesmo poder e os dois alunos resolveram traduzir em comandos do TARTA o que tinham pensado, mas, cometeram sempre a mesma falta, não mudavam o *passo* ao Tarta (parágrafos 20 a 35). O micromundo apoiou o Delfim na percepção da mudança necessária para o *passo* do Tarta e a figura T11 foi construída (descrição entre os parágrafos 35 e 36). Este procedimento do Delfim em simultâneo com a imagem dada pelo micromundo acabaram por actuar na ZDP do Abel permitindo-lhe a vivência da sua dinâmica mental ligada à manipulação mental de imagens (parágrafos 36 e 37). Abel activamente transformou aquilo de que se tinha *apropriado*. O colega e o micromundo foram *mediadores* do pensamento do Abel.

5.2.2. A intervenção da investigadora

Os episódios que se seguem querem evidenciar o papel da investigadora a promover nos alunos Edgar e Gil (grupo 2) a construção de significado, o qual estava relacionado com o conhecimento que o micromundo incorpora e, também ilustrar como os alunos se apropriaram desse mesmo conhecimento. Queremos sustentar a hipótese de Mariotti (2002) que afirma que os significados são enraizados na experiência fenomenológica (acções do utilizador e “feedback” do ambiente, do qual o artefacto é um elemento), mas a sua evolução é atingida por meio de construção social na aula, sob a ajuda do professor.

Vamo-nos debruçar novamente sobre o *episódio 13*, onde os alunos do grupo 2, sozinhos, não estavam a avançar na execução da tarefa. A investigadora na sua intervenção de mediação começou por apoiar e encorajar o processo de pensar (mediação *indirecta*), fazendo-lhes perguntas (linha 37) e depois interveio duma forma *directa*, não só guiando a interacção entre o perceptual (estrutura da figura) e o visual (fazer surgir o modo PVP nos alunos) como também tentando que antecipem imagens a movimentar. Isto é feito através de gestos de características sociais (contribuindo para a construção social do conhecimento), de diálogos e de encorajar gestos aos alunos com os quais eles lhe transmitiram e partilharam os seus

modos de pensar. Depois tendo em conta o que os alunos lhe disseram traduziu isso em linguagem do micromundo Tarta e a figura 5.14 foi construída.

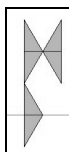


Fig. 5.14. Figura construída pela investigadora.

A investigadora deixou o grupo (parágrafo 38) porque sentiu que na tarefa a intervenção bastava para os alunos continuarem a tarefa e verificou-se que de facto a *mediação* anterior da investigadora em simultâneo com o micromundo Tarta actuaram como suportes para trabalhar a *ZDP* do Edgar (o Gil tinha-se entretanto desinteressado) permitindo-lhe construir as figuras R15 e R16 e viver um modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens. Edgar *apropriou-se* dum modo de pensar, manipulou mentalmente imagens, usou competências e trabalhou com esquemas de programação e de acção.

Re-analisemos também o *episódio 24*, onde, para além de ele evidenciar a mediação semiótica feita pelo micromundo Tarta na vivência dos modos de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens dos alunos Gil e Edgar (parágrafos 56 e 57), ilustra sobretudo a *mediação directa* da investigadora em duas situações, primeiro a fomentar a vivência do modo PVMM (parágrafos 56 e 59) e depois para prosseguir a construção guia e encoraja os alunos para um pensar resultante da percepção, modo PVP (descrição a seguir ao parágrafo 59). Aqui este episódio quase que não deixa observar se houve ou não apropriação pelos alunos dos referidos modos de pensar.

5.2.3. A função mediadora do micromundo Tarta

Vejamos como condições interactivas com o micromundo Tarta possibilitaram que o discurso fosse partilhado, um nível potencial mais elevado de cooperação entre alunos e o desencadear dos modos de pensamento visual-espacial dos alunos. Ainda, adequando-me às ideias de Clements e Sarama (1997), quero realçar o uso do micromundo Tarta como um veículo para o desenvolvimento e conexões de ideias em matemática e assim ser tomado como uma metáfora para pensar visual-espacial, produzindo metáforas interrelacionadas: o uso do TARTA como ambiente geométrico, o uso do TARTA como robot, o uso do TARTA como diversão, o uso do TARTA como ligação.

Retomemos o *episódio 28* onde as interações dos alunos com o micromundo Tarta envolveram *acção* (na medida que os alunos através dos comandos primitivos do micromundo e fundamentalmente relacionados com o movimento *deslizar* movimentavam o Tarta) e *percepção*, mediação do TARTA relacionada com um modo de pensar PVP (parágrafos 12 a 36). Contudo o contexto externo na sala de aula, determinado pelo micromundo, gestos, figuras, folha de tarefas, diálogos, por si, parecia não serem suficientes para os alunos avançarem na resolução da *flor* e a intervenção da professora parecia necessária ao grupo. Mais tarde (descrição entre os parágrafos 35 e 36) o micromundo apoiou o Delfim na percepção da mudança do *passo* do Tarta, *mediação semiótica*. Assim uma nova figura foi construída. O Delfim e o micromundo actuaram como *mediadores* suportando o pensamento visual-espacial do Abel (parágrafos 36 e 37).

Vamos agora examinar outra vez o *episódio 9*. Delfim parecia que estava a fazer ventriloquismo, pois limitava-se a fazer o que Abel lhe tinha mandado (parágrafo 51), mas quando construiu T15, percebeu que a figura construída não estava embutida na estrutura da *flor*. O micromundo Tarta apoiou o Delfim na *percepção* da estrutura da *flor* e na comparação da figura construída. Isso obrigou-o a chamar o colega e a partilhar o seu discurso interior evidenciando assim o seu modo de pensar visual-espacial, modo PVP (linha 52). Novamente Abel indicou ao Delfim o que devia fazer e este fê-lo sem se saber se Delfim estava a perceber ou não. Contudo depois da sua construção T16 (usando o micromundo Tarta) e do Abel dizer *apa*, foi despoletado no Delfim a compreensão do que estava a fazer e a antecipação de como deveria continuar, ou seja um pensar visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens começou a ser vivido, modo PVMM e que se traduziu em verbalização, num gesto social (parágrafo 55) e nas construções T17 e T18. Parece que os papéis desempenhados *pelo micromundo e pelo colega Abel* nesta altura foram fundamentais para o Delfim, ambos foram *mediadores* no desencadear do pensamento visual-espacial ligado à manipulação mental de imagens. Assim talvez possamos referir que o *computador e o Abel* actuaram como *suportes* para trabalhar a *ZDP* do Delfim, apoiando-lhe a vivência e apropriação do modo PVMM e as construções T17 e T18. Repare-se ainda que neste excerto das interações vividas pelos alunos do grupo 1, não havia propriamente um diálogo entre os alunos, o Abel era a voz da autoridade e por tal tinha saber e poder. O Delfim apropriou-se dos significados do Abel e fez a correspondente *internalização* (parágrafo 55). A dinâmica mental de Abel foi sempre apoiada ou seja *mediada pelo uso do micromundo Tarta* onde *abstracções* elaboradas baseadas nas relações percebidas foram evidenciadas (parágrafo 53).

O micromundo Tarta constitui um ambiente geométrico onde os comandos do TARTA ao serem usados, manipulam ideias matemáticas de deslizar, virar e rodar. Os alunos

observam os resultados e reflectem sobre eles. Os alunos começam a consciencializar-se informalmente das propriedades das transformações geométricas. Ao focarem a sua atenção nas componentes dos movimentos rígidos, eles não só trazem ao consciente movimentos físicos como vão melhorando as suas compreensões sobre ângulo, recta, perpendicularidade, direcção horizontal, direcção vertical, simetria, formas, medida (ângulos, lados). Abstracções são encorajadas a serem construídas do visual, não tanto de percepções mas mais da organização de acções sobre os objectos e incluem imagética dinâmica. Voltemos ao episódio 9, Delfim consegue abstrair organizando acções (eliminar um Tarta) para a construção de T17 e imaginar o movimento virar do Tarta para a construção T18. Para a primeira construção T17, Delfim usufruiu não só da mediação do micromundo como também da mediação do colega Abel.

55 Abel: *apa*.

56 Delfim: *apa* (indicando com o dedo que estava a perceber) . *Agora sou eu que faço*.
(Faz a construção T17.)



(Abel chama a Professora para lhe mostrar o que tinham feito enquanto Delfim continua a construir a *flor*, mudando o passo, para “o passo1”, identificando a linha em torno da qual iria virar o Tarta, e procurando os respectivos pontos para a linha de viragem ser traçada).

57 Delfim: *Ora Vira, vira, vira*. (Cantarolando e fazendo gestos com a mão fez a construção T18.)

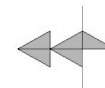


O uso do micromundo Tarta é uma diversão porque mudar os comandos ao TARTA revelam-se actividades motivantes para a maior parte dos alunos. Criar uma figura é geralmente fonte de considerável orgulho. Reparemos por exemplo, no episódio 29, na grande motivação dos dois alunos durante todo o episódio para construir as diferentes figuras da tarefa *espinha* acompanhada por gestos sociais (baterem as palmas das mãos).

25 Delfim: *Vira* seguido de *enter*. (Aparece no ecrã T10.)

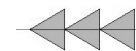


Delfim bate a palma da sua mão com a outra palma do colega e disse:) *Agora outra vez linha*. (Abel começa a falar e apontar para o ecrã e a mexer nas teclas, não se percebe o que faz, mas no ecrã está a figura T11.)



26 Abel: *Ó professora, agora que íamos também olhe o que aconteceu !!* (Ninguém lhes ligou e Abel apaga tudo com *limpatudo* e rapidamente começam tudo de princípio e ora um aluno ora outro constróem a figura T10, depois alternadamente as figuras T12, T13 e T14 sem qualquer dificuldade).

27 Delfim: (Construiu T12



e no fim bateu uma palmada na palma do colega como a passar a tarefa seguinte.)

28 Abel: (Construiu T13



e ... até acabar a tarefa).

O uso do micromundo Tarta é como um robot, os objectos (Tarta e Azulejo) do TARTA executam comandos. Fazem exactamente o que os mandam fazer. A linguagem do TARTA dá feedback que pode ser usado para reflectir de forma natural sobre as ideias, intuições, estratégias de alguém. O Abel e o Delfim ao construírem a tarefa *espinha*, episódio 29, no seu contentamento pelo sucesso na execução trocaram os movimentos deslizar por virar (*agora outra vez linha*). A figura construída no ecrã assinalou essa confusão, mostrando o Tarta virado em torno de uma linha vertical escolhida pelo micromundo. Os alunos não o perceberam, não relacionaram as várias imagens, e apressadamente apagaram tudo e recomeçaram a tarefa (parágrafo 25 e 26).

O uso do micromundo Tarta com uma ligação que faz a transição do pensamento geométrico visual para o geométrico descritivo. Os comandos do micromundo e as figuras produzidas no ecrã ajudam então a fazer conexões mentais entre diferentes representações e diferentes conhecimentos. No TARTA, a ênfase é dada não tanto às figuras construídas mas mais às acções físicas (movimentos rígidos) e conexões dinâmicas mentais desenvolvidas entre as representações o que obriga o envolvimento por parte dos alunos em imagética dinâmica.

5.2.4. Interacções sócio-culturais

Para tentar discernir a evolução das interacções sócio-culturais vividas pelos alunos nas duas díades durante a execução da tarefa *flor* e a respectiva afectação aos modos de pensamento visual-espacial desses alunos, fomos examinar as transcrições para cada grupo das respostas à referida tarefa. O Quadro 5.1 querem disso mesmo dar conta. Debruçar-me-ei

em particular sobre duas sequências de interações que ocorreram: a primeira com os alunos do grupo 1 que autonomamente executaram a tarefa e a segunda com os alunos do grupo 2 onde foi necessária a intervenção da investigadora. Com esta escolha de interações, parece que podemos examinar ocorrências importantes para o estudo. Para não sobrecarregar este texto, decidi incluir nesta secção apenas interpretações das sequências de interações observadas. Uma versão mais detalhada dos momentos aqui referidos encontramos no Apêndice B.

O Quadro 5.1 representa a evolução das interações entre os alunos do grupo 1, as quais fizeram com que estes conseguissem viver os vários modos de pensamento visual-espacial que provavelmente não o fariam se cada um trabalhasse sozinho. O micromundo Tarta apoiou nestes alunos a construção interna dos significados relacionados com os movimentos rígidos que podiam movimentar o Tarta.

Vejamos detalhadamente que no momento 1, as regras de trabalhar em grupo não funcionam, os dois alunos trabalham cada um por si, depois as interações entre eles foram sendo gradualmente feitas e cada aluno teve oportunidade de actuar na ZDP do outro, pelo menos uma vez, fazendo com que esse outro vivesse o modo PVMM (momento 2 e momento 4). Repare-se que no momento 2, o Delfim vivia o modo PVP e com a sua actuação provocou que o Abel começasse uma vivência do modo PVMM. No momento 3, o Delfim faz tudo o que o colega manda e parece que não pensa por si, contudo o Abel, para o poder ajudar, envolve-se no modo de pensar PVR. Podemos ainda dizer que o pensar de Abel envolveu a sequência PVMM→PVR (parágrafo 53). Se agora olharmos um pouco mais para o excerto seguinte da transcrição, referente ao momento 4:

(Delfim tecla o que o colega lhe mandou, *db* e apareceu uma nova construção T16.)



54 Abel: *apa*.

55 Delfim: *apa* (indicando com o dedo que estava a perceber). *Agora sou eu que faço*.

(Delfim fez a construção T17).



reparamos que O Delfim vive o modo PVP e as palavras pronunciadas pelo Abel (que vive o modo PVMM) juntas com a imagem dada pelo micromundo Tarta provocam no Delfim uma mudança no seu pensar. Assim, este excerto evidencia a sequência de pensamento PVP → PVMM (ligação 1, ver 4.2) para o Delfim. Depois as regras no grupo, para se usar o

micromundo Tarta, mudam também porque os alunos a partir dessa altura trabalham em cooperação, momento 5. No momento 6, cada aluno vive o modo de pensamento visual-espacial adequado às exigências da tarefa, significados são partilhados, os comandos do micromundo Tarta já estão lembrados, coordenações podem ser feitas. O TARTA medeia o pensamento visual-espacial dos dois alunos.

Quadro 5.1. Interações entre um par de alunos do grupo 1.

Momentos	Descrições	Modos de pensamento visual-espacial		§§
		Abel	Delfim	
1 Alunos isolados	Os alunos trabalham cada um por si, disputam o teclado. Gozam de igual autoridade no grupo.	PVP, PVMM	PVP, PVMM	1-36
2 Acções mediadas sobre o ZDP do Abel	O micromundo e o Delfim são mediadores no pensamento de Abel e actuam na ZDP do Abel.	PVMM	PVP	36-37
3 Fenómenos de ventriloquismo	Abel pensa e diz (autoridade de Abel) e Delfim faz ventriloquismo.	PVMM e PVR § 53	PVP	38-54
4 Delfim adquire autoridade	Micromundo Tarta e Abel actuam na ZDP de Delfim	PVMM	PVMM	55
5 Partilha de significados	Os dois alunos começam a trabalhar em grupo. já estão desenhadas. À vez, um pensa e dita e o outro executa. A autoridade de Delfim aumenta, mas ainda precisa da concordância do Abel.	PVMM	PVMM	57-71
6 Os alunos sentem-se com igual autoridade	Os alunos distribuem entre si partes da tarefa, sentem-se em pé de igualdade, têm a mesma autoridade.	PVMM	PVMM	72-80

O pensamento visual-espacial que ocorreu nas mentes dos alunos do primeiro grupo foi socialmente vivido e os modos de pensamento visual-espacial residentes nos alunos nem sempre foram os mesmos. Por exemplo, nos parágrafos 36 a 54 das transcrições, Quadro 5.1,

os dois alunos viveram modos de pensamento visual-espacial diferentes: o Abel o modo PVMM e o Delfim o modo PVP. A partir do parágrafo 56, Quadro 5.1, verifica-se que nos dois alunos existia um mesmo modo de pensar visual-espacial, ligado à manipulação mental de imagens, modo PVMM.

Consideremos agora como as interações sócio-culturais foram vividas no grupo 2, durante a execução da tarefa *flor* (Quadro 5.2). Os alunos do grupo 2 depararam-se muitas vezes com obstáculos, só os ultrapassaram com o auxílio da investigadora. As dificuldades tinham a ver com a tradução de esquemas geométricos, de esquemas de acção em linguagem do micromundo, bem como com a capacidade de estruturação espacial e a capacidade de fazer antecipações. A interação social no grupo pareceu fazer-se segundo uma sequência na qual às interações entre os dois alunos se seguia a intervenção da investigadora para os ajudar.

No momento 1, os alunos param porque tinham dificuldade em manipular mentalmente imagens, eles não identificam o movimento adequado (rodar). Na momento 2, a investigadora, através da manipulação de um Tarta de papel, pretende que eles se apercebam dos movimentos (modo PVP) e depois antecipem imagens (modo PVMM). Reparemos com pormenor neste excerto da respectiva transcrição:

- 1 Inv: *Aqui está um Tarta. O Tarta estava assim* (manipula o Tarta de papel, pára). *Por onde vais começar a tua figura?*
- 2 Edgar: *Esta* (aponta um Tarta).
- 3 Inv: *Esta? Aqui por cima? Então pronto. Então por cima... se calhar é melhor começares pela orelha? Como quizeres ... Se começares pela orelha, depois vais fazer aqui para baixo.*(Compara apontando com o dedo, o Tarta da figura da folha com o que está no ecrã e faz o movimento rodar com a mão, no ecrã, para mostrar como o Tarta se deveria movimentar.)
Isto é igual, não é?... Tens assim o teu Tarta (o de papel e manipula-o), *primeiro...é melhor fazeres desfaz*, (olha para o ecrã e, tecla *desfaz*, no ecrã aparece a figura R5).



- 4 Inv: *Tu queres pôr o Tarta...Porque orelha queres começar? Começas por esta.*
(Os alunos olham para o Tarta que a investigadora aponta)
- 5 Inv.: *Está assim, não está?* (manipula o Tarta de papel). *Se eu quizer pôr assim* (roda a peça). *O que faço?*
- 6 Gil: *Rodo*
- 7 Inv: *Em torno de que ponto?*
- 8 Gil e Edgar: *Este* (Apontam o vértice do ângulo recto).
- 9 Inv: *Rodo de quanto?* (Roda o Tarta de papel de 90° no sentido do movimento dos ponteiros do relógio)

A investigadora começa por fomentar nos alunos o modo PVP através da manipulação do Tarta de papel e do uso de uma metáfora “orelha” tentando assim que os alunos se apercebam dos movimentos e reconheçam o Tarta na figura da folha (parágrafos de 1 a 6). Depois a investigadora tenta fazer com que os alunos antecipem imagens, modo PVMM (parágrafos de 7 a 10). A sua estratégia de intervenção assenta no fazer desenvolver nos alunos o pensar segundo a sequência PVP → PVMM, (ligação 1, ver 4.2). Usa também gestos para guiar e apoiar o pensamento dos alunos em relação às figuras do ecrã. Isso é conseguido (momento 3), mas contudo os alunos ainda não dominam bem as características do TARTA, nem os movimentos e esquecem-se de indicar a linha de viragem, o computador considera uma outra e constroi uma figura que não era a desejada. A investigadora desconhece este problema e vê no ecrã uma figura que pode ser continuada para a construção da flor e diz “está bem”, o que contradiz o que os alunos estavam a sentir, momento 4 e orienta-os, a partir do que têm no ecrã na prossecução da tarefa. Os alunos constróiem mais uma figura, mas não a reconhecem na flor, momento 5. Novamente a investigadora intervém, (momento 6) no sentido de fomentar no aluno Edgar a capacidade de estruturação e a manipulação de imagens, mas é ela que vai construindo figuras. A investigadora tenta que o aluno acompanhe o seu pensar e diz e faz e o aluno vê. No momento 7, o Edgar apropria-se do modo de pensar PVMM. Depois (momento 8) a investigadora fomenta nos alunos a manipulação mental de imagens, após eles terem identificado a figura do ecrã na flor. A estratégia de intervenção da investigadora passa novamente pela sequência PVP → PVMM ajudando o Gil a traduzir em linguagem do TARTA o que os três tinham pensado em conjunto.

O processo de mediação do micromundo Tarta neste grupo desenvolveu-se a dois níveis: significados emergiram do envolvimento dos alunos no uso do micromundo, e o processo foi usado pela investigadora para guiar a evolução dos significados dentro do grupo. Repare-se que o pensamento partilhado e a participação guiada foram sendo feitos nas diferentes intervenções da investigadora com os alunos Edgar e Gil, mas isso não era garantia que eles executassem autonomamente a tarefa, se eles não estivessem a viver os mesmos modos de pensar da investigadora (não apropriação dos seus modos de pensar) ou se eles não tivessem competências ligadas à exteriorização desse mesmo pensamento, neste caso, dominassem esquemas de acção ou de programação do TARTA.

Quadro 5.2. Interações entre alunos do grupo 2 e a investigadora.

Momentos	Descrições	Modos de pensamento visual-espacial			§§
		Investi- gadora	Edgar	Gil	
1 Alunos iniciam colaboração e experimentam comandos do TARTA	O TARTA medeia a acção e a percepção dos alunos, mas depois ficaram parados.		PVP	PVP	
2 A investigadora actua como suporte na ZDP dos alunos	A investigadora manipula um Tarta de papel, faz perguntas e usa gestos. Pretendia gerar significados e fomentar transformações mentais	PVP ↓ PVMM	PVP ↓ PVMM	PVP ↓ PVMM	1-11
3 Indecisão e ambiguidade	Alunos em colaboração tentam traduzir em linguagem do TARTA, os seus pensares visuais-espaciais de que se tinham apropriado. Surge um problema e o computador fez algo inesperado.		PVMM	PVMM	12-19
4 A investigadora faz perguntas para apoiar a ZDP dos alunos	A investigadora desconhece o problema que aconteceu e a sua intervenção não é adequada. Põe algumas questões para os orientar.		PVMM	PVMM	20-26
5 Colaboração entre os alunos e algumas dificuldades ultrapassadas	O Edgar e o Gil resolvem o problema por tentativa e erro. Edgar foi exprimindo a sua dinâmica mental. Continuam a construção. Não reconhecem a figura construída como parte da <i>flor</i> e não sabem continuar.		PVMM	PVMM	27-29 30-31
6 Intervenção da investigadora na ZDP do Edgar	A investigadora começando por construir mais um Tarta, faz perguntas por forma a que os alunos identifiquem a parte da flor que está no ecrã, e que antecipem também as	PVP ↓ PVMM	PVP		32-38

	imagens a movimentar. Edgar vai respondendo bem e simultaneamente a investigadora vai construindo uma nova figura.				
7 Trabalho isolado do Edgar	O Edgar apropriando-se do modo de pensar expresso pela investigadora constrói mais duas figuras. O micromundo mediou também o pensamento visual-espacial do Edgar.		PVMM		39
8 Intervenção da investigadora	A investigadora faz perguntas tentando que identificassem a figura na flor. Ajuda o Gil a traduzir em linguagem do TARTA o que tinham pensado em conjunto. Orienta-os para a manipulação mental de imagens.	PVP ↓ PVMM	PVP	PVP	40-45

Em forma de conclusão poderemos afirmar que os modos de pensamento visual-espacial foram fortemente influenciados pela dimensão sócio-cultural nas suas diferentes vertentes. O modo PVMM emerge quando se actua na zona do desenvolvimento proximal e esta pode ser despoletada por um colega que pode ser ou não o mais capaz. A sequência PVP → PVMM esteve presente como estratégia de intervenção da investigadora para a interiorização nos alunos do grupo 2 dos modos de pensamento. Contudo nem artefactos nem a construção social sustentada pelo professor ou par na aula, bastam para fazer com que a interiorização desses modos de pensamento por vezes se faça. Há necessidade de outras competências intrinsecamente ligadas ao modo PVE. Nos alunos do grupo 1 foram evidenciadas duas sequências de modos de pensamento: a sequência PVP → PVMM e a sequência PVMM → PVMR (uma vez no aluno Abel).

Capítulo VI

O desenvolvimento dos ambientes de ensino

Neste capítulo, para satisfazer o segundo objectivo do estudo, serão descritos os itens necessários para o desenvolvimento, implementação e avaliação dos ambientes de ensino: a escolha do domínio de trabalho, o desenvolvimento do micromundo Tarta, o desenvolvimento das sessões de ensino, a sensibilização das professoras aos ambientes de ensino e a análise dos níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos alunos.

6.1. Escolha do domínio de trabalho

A escolha do domínio da matemática significativa para este estudo surgiu de três critérios. Primeiro, o domínio deveria contribuir para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial dos alunos. Segundo, esse domínio deveria fazer parte do currículo de matemática do 1º ciclo do Ensino Básico. Terceiro, o domínio deveria permitir ver em acção o pensamento visual-espacial daqueles alunos através da observação de alunos ocupados na execução das suas tarefas.

Para esta investigação optei por trabalhar com alunos do 4º ano de escolaridade do 1º ciclo do Ensino Básico, pois considerei que, pela idade de mais ou menos 9 anos, a criança tem estrutura mental apropriada para a compreensão dos sistemas projectivos e euclidianos e que os alunos de 4º a 6º anos de escolaridade podem aprender os conceitos de simetria e os princípios relacionados com ela têm o potencial para aumentar as capacidades espaciais das crianças (Kidder, 1976).

O domínio escolhido foi o da geometria das transformações, pois é matematicamente rico e ao mesmo tempo está fundado nas experiências do dia a dia com o movimento e a imagem. A aprendizagem da geometria das transformações está intimamente ligada à

presença do raciocínio visual dinâmico onde os alunos aprendem a identificar e a ilustrar movimentos de formas a duas e a três dimensões. Sabemos ainda que a geometria das transformações é considerada de grande importância para o currículo correspondente ao 1º e 2º ciclo do Ensino Básico por um número de investigadores (Clements e Battista, 1992; Del Grande, 1990; Edwards, 1991; Johnson-Gentile e outros, 1994; Williford, 1972), embora haja alguma controvérsia sobre como as crianças pensam e compreendem as transformações (Kidder, 1976; Lesh, 1976; Moyer, 1978).

Williford (1972) investigou os efeitos dum ensino dos conceitos “movimentos rígidos” e “congruência” e concluiu que os alunos dos 3º e 4º anos aprenderam processos manuais para produzir imagens de transformação, mas não como mentalmente executar tais transformações. Os resultados de Kidder (1976), prolongando os de Williford, indicaram que são limitadas as capacidades dos estudantes dos níveis “middle and junior high” da escola americana para executarem mentalmente isometrias. Ele conjecturou que a capacidade de executar transformações a nível representacional deriva do pensamento operacional formal (no sentido do Piaget) e que os sujeitos de treze anos do seu estudo não estavam ainda no estágio operacional formal. Afastando-se de uma interpretação piagetiana, Lesh (1976) observou que não é claro que as crianças pensem as transformações euclidianas como movimentos rígidos e muito menos como combinações de “deslizamentos”, “viragens” e “voltas”. Moyer (1978) investigou, em crianças de quatro a oito anos de idade, se a duas dimensões a compreensão da isometria está dependente duma consciência explícita do movimento físico relacionado com a transformação. Nada de significativo foi detectado para “deslizamentos” e “viragens”, mas essa dependência foi detectada para as “voltas”. Os resultados de Moyer parecem indicar que o aumento no nível de compreensão está relacionado com a idade em vez da capacidade intelectual como sugeriu Kidder.

No currículo de matemática do 1º ciclo do Ensino Básico português, o domínio da geometria das transformações ocorre em conceitos como o estudo de simetrias, frisos, rosáceas ou padrões. Além disso este é um domínio que actualmente é considerado muito importante. Num Seminário americano sobre o ensino da Geometria (citado em Veloso, 1998, p. 18) foi feita a recomendação de se dar “maior ênfase aos conceitos centrais da geometria, tais como as transformações geométricas e seus efeitos nos conjuntos de pontos, nos conceitos referentes à distância, à superfície, etc”.

Para que fosse possível captar outros aspectos cognitivos nos processos de aprendizagem considere-se que seria de extrema importância que o contexto de ensino envolvesse o uso de um ambiente computacional que possibilitasse o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. já que a relação do aluno com aquele meio é diferente da que se estabelece usando materiais

concretos, desenhando diagramas no papel ou trabalhando sobre representações mentais. Foi então construído um micromundo para ser suporte tecnológico neste estudo e ser um meio (metáfora) para pensar.

6.2. Desenvolvimento do micromundo Tarta

Estava interessada em construir um ambiente de ensino que desenvolvesse o pensamento visual-espacial apoiando o raciocínio visual dinâmico dos alunos e tinha presente as orientações curriculares para o ensino da matemática que incluíam o recurso à utilização do computador. Assim, um micromundo que vou designar por “micromundo Tarta” ou simplesmente “TARTA” (abreviatura de TARTARUGA, usada na série filmada muito popular TARTARUGAS NINJA) foi desenvolvido para ser suporte tecnológico do ambiente de ensino numa das turmas.

O TARTA foi concebido pela investigadora para tentar estimular a exploração das ideias translação, reflexão e rotação, através dos movimentos rígidos deslizar, virar e rodar e para ser usado por crianças desde o pré-escolar ao primeiro ciclo do Ensino Básico, bem como para ser utilizado facilmente nos cursos de preparação dos respectivos professores. O micromundo Tarta foi construído em linguagem Megalogo a qual foi produzida na Universidade Comenius em Bratislava, permitindo construir facilmente um micromundo que mantenha as características pedagógicas da linguagem Logo. Pretendia que o micromundo Tarta permitisse facilmente um número de acções sobre certas representações visuais. Para isso foram criadas duas formas planas pré-construídas, chamadas *Tarta* (triângulo rectângulo) e *Azulejo* (quadrado) que podem ser movimentadas através de cerca de vinte comandos (ver figura 6.1 e figura 6.2). Pretende-se que o micromundo Tarta seja para o utilizador um potencial de aprendizagem fomentando experiências em pensamento visual-espacial, construindo significados matemáticos, estruturando intuições, imaginando de uma forma dinâmica, favorecendo a criatividade.

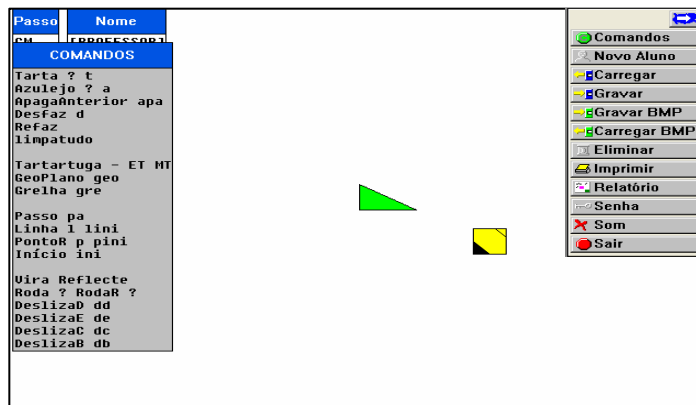


Fig. 6.1. Imagem que mostra o ecrã do TARTA para o professor com dois objectos, a janela dos comandos, e a janela das opções.

O micromundo Tarta foi sujeito a avaliações feitas pela investigadora tendo por base processos de avaliação de software educativo propostos num trabalho anterior (Costa, 1985). O micromundo Tarta foi primeiro usado na sala de informática da Escola Superior de Educação de Coimbra por dois alunos do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico. Após as alterações ao micromundo achadas convenientes foi então usado na aula, por todos os alunos da turma A deste projecto de investigação, em cinco das 13 sessões de ambiente educativo a que a turma foi sujeita. Os alunos só usaram nas suas tarefas um dos objectos o Tarta. Mais tarde, o micromundo Tarta foi novamente avaliado no terreno quando utilizado por professores do pré-primário e primário em formação contínua, tendo sido usados os dois objectos Tarta e Azulejo. Foram introduzidas novas alterações ao micromundo Tarta depois deste teste no terreno. As actividades de avaliação conduzidas tinham o propósito: *formativo*, para melhorar o desenho do programa, *comparativo*, para determinar a sua eficácia, *observação directa*, para determinar o que realmente acontece quando o programa é usado e *predictivo* para avaliar as características do programa (V. Jonhson, 1987).

Construíram-se páginas *html* com toda a informação envolvida no ambiente de ensino que pode ser criado à volta do micromundo Tarta. Assim foi feito um CD denominado “micromundo Tarta, ambiente Tarta” (apêndice D) que disponibiliza ao leitor o software



relativo ao micromundo Tarta, por intermédio do ícone e um conjunto de materiais para a exploração do micromundo a que se deu o nome de “ambiente Tarta”.

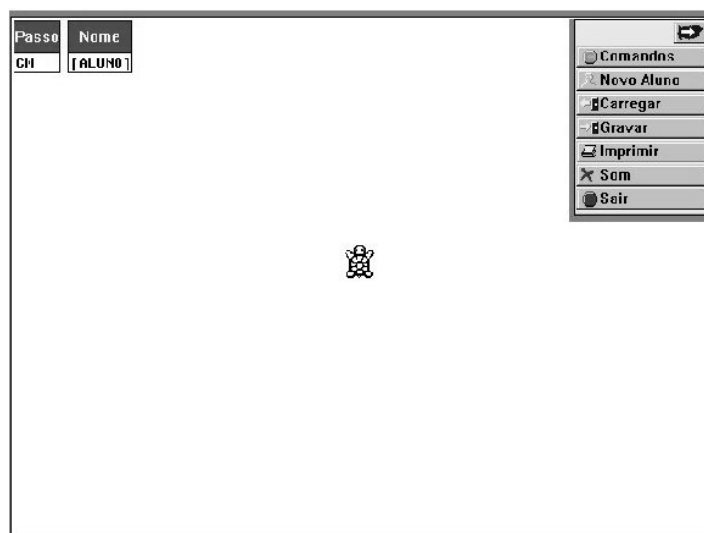


Fig. 6.2. Imagem do ecrã do TARTA para o aluno e da janela das suas opções.

As páginas *html* que constituem o ambiente Tarta são ilustradas por figuras construídas com o software TARTA, uma forma de mostrar a potencialidade do micromundo. No menú principal do ambiente Tarta aponta-se que vão ser abordados e caracterizados os seguintes aspectos principais: O QUE É O TARTA, INTRODUÇÃO/APRENDIZAGEM, USOS DO TARTA e SOBRE O CD. Por sua vez, estes mesmos itens serão ainda desenvolvidos em sub-itens de informação, considerada importante e significativa. Os três sub-itens: "círculo de estudos" pertencente a INTRODUÇÃO/APRENDIZAGEM e "com professores de pré-primário e primário", e "projectos sugeridos" elementos do item USOS DO TARTA não foram usados neste projecto de investigação. O sub-item "círculo de estudos" é um espaço dedicado à exemplificação duma possível acção de formação que ajude os professores a experimentar o ambiente Tarta e ao mesmo tempo incite à reflexão sobre a importância do ensino da geometria e da integração das novas tecnologias na aula de Matemática. Os sub-itens "com professores de pré-primário e primário" e "projectos sugeridos" são o produto do uso do micromundo nos cursos de formação contínua de professores, sobre "Tecnologia como suporte da aprendizagem da Matemática", na Escola Superior de Educação de Coimbra.

Sublinho novamente que o sub-item denominado "com alunos do 1º ciclo do Ensino Básico" que se localiza no item USOS DO TARTA no CD e no ambiente Tarta (apêndice D) apresenta a experimentação na aula do ambiente de ensino deste estudo, onde foram usados manipuláveis com computador e manipuláveis sem computador.

6.3. Desenvolvimento das sessões de ensino

As sessões de ensino foram criadas de modo a satisfazer a determinadas exigências. A primeira diz respeito ao conteúdo geométrico das sessões que pretendia ser o mesmo para ambas as turmas. Às duas turmas foram distribuídas sempre as mesmas tarefas, mas em cinco das sessões, quando os alunos da turma A usavam o micromundo Tarta, as tarefas correspondentes na turma B, embora tanto quanto possível similares no conteúdo, usavam outro material manipulável. A segunda exigência é relativa à ordem com que os manipuláveis deveriam ser usados pelas crianças. Pretendia-se que as tarefas fossem propostas de forma a seguir-se a via do concreto para o abstracto. Foi entendido haver uma linha condutora do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos para os dois ambientes de ensino a qual começava por familiarizar as crianças com cada um dos três movimentos, separadamente. O movimento rodar foi o primeiro com que os alunos lidaram, a seguir exploraram o conceito de simetria rotacional, relacionaram-no com o conceito de simetria reflexional. O movimento virar foi depois trabalhado e por último os alunos manipularam o movimento deslizar. As sessões finais pretendiam fazer não só a integração dos três movimentos como também a integração dos conceitos de simetria. Para a turma A, os alunos só usaram o TARTA para cada movimento depois de estes serem tratados com manipuláveis.

Para determinar os níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico dos alunos, segundo objectivo desta investigação, pretendi usar a extensão do modelo de Van Hiele para movimentos elementares, desenvolvida por Clements e Battista (Johnson-Gentile, 1990) e descrita na secção 3.5.3. Para tal, as sessões dos ambientes de ensino deveriam ser construídas de forma a que as respectivas actividades reflectissem também, tanto quanto possível, a sequência das fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração (narrada no Quadro 3.2).

A lista dos nomes das 13 sessões de ensino previstas para os dois ambientes está descrita no Quadro 6.1.

Quadro 6.1. Lista das sessões dos dois ambientes de ensino.

Sessão <i>Introdutória</i>	
1ª Sessão - <i>Os movimentos</i>	
2ª Sessão - <i>O rodar</i>	
3ª Sessão - <i>O rodar e o geoplano</i>	
4ª Sessão - <i>Ventoinhas</i>	4ª Sessão - <i>As ventoinhas</i>
5ª Sessão - <i>A simetria rotacional</i>	
6ª Sessão - <i>A reflexão</i>	
7ª Sessão - <i>O virar</i>	
8ª Sessão <i>O papagaio</i>	8ª Sessão <i>Simetrias</i>
9ª Sessão - <i>O deslizar</i>	
10ª Sessão - <i>O jogo da transformação</i>	
11ª Sessão - <i>Frisos</i>	11ª Sessão - <i>Peças hexagonais</i>
12ª Sessão - <i>A tenda</i>	12ª Sessão - <i>Pavimentar</i>
13ª Sessão - <i>A flor</i>	13ª Sessão - <i>O jogo com tetraminós</i>

Os ambientes para a turma A e para a turma B tiveram um tronco comum em cujas actividades os alunos só usaram materiais manipuláveis sem computador, num total de oito sessões: *os movimentos, o rodar, o rodar e o geoplano, a simetria rotacional, a reflexão, o virar, o deslizar, o jogo da transformação*. O ambiente de ensino para a turma A envolveu para além das oito sessões do tronco comum mais as seguintes cinco sessões onde os alunos usaram o micromundo Tarta: *ventoinhas, o papagaio, frisos, a tenda e a flor*. Os alunos da turma B usaram sempre material manipulável sem computador, mesmo nas cinco sessões que não faziam parte do tronco comum: *as ventoinhas, simetrias, peças hexagonais, pavimentar e o jogo com tetraminós*.

6.4. Sensibilização das professoras aos ambientes de ensino

As professoras que participaram neste estudo tinham mais de 15 anos de serviço como professoras do 1º ciclo do Ensino Básico e nunca tinham utilizado o computador na aula. A escolha das professoras foi baseada em três critérios; o primeiro foi os seus alunos serem do 4º ano de escolaridade de uma escola de Coimbra; o segundo foi pelo menos uma das turmas pertencer a uma escola situada nas proximidades da Escola Superior de Educação de Coimbra (ESEC), para que a turma se pudesse deslocar e utilizar a sala de informática da ESEC. O

último critério estava relacionado com a disponibilidade manifestada pelas professoras em participar no estudo. Foram assim seleccionadas as duas professoras necessárias e este estudo.

O conhecimento matemático da Ana e da Sara, pseudónimos que atribuo às professoras para que a confidencialidade seja mantida, tinha sido adquirido durante a sua formação inicial e a respectiva prática de ensino. A Ana trabalhava de tarde (das treze às dezoito) e era professora dos alunos da turma B desde o primeiro ano, enquanto que a Sara trabalhava de manhã (das oito às treze) e só este ano tinha recebido a turma A para ensinar. Ambas as professoras gostavam de ensinar Matemática.

A primeira tarefa da investigadora foi a implementação de um programa de sensibilização das professoras aos ambientes de ensino que durou 10 meses e envolveu cerca de 30 horas de preparação com cada professora. Houve uma aprendizagem em comum de conhecimentos entre as professoras e a investigadora envolvendo processos de reflexão, reestruturação e diálogos construtivos. Pretendia-se que as professoras se apropriassem dos ambientes de ensino previamente concebidos pela investigadora, influenciassem a refinação das sessões dos dois ambientes de ensino e pudessem vir a interpretar as sessões na aula de forma criativa.

O programa de sensibilização envolveu encontros de dois tipos: umas vezes trabalhavam as três (a investigadora e as duas professoras), outras vezes eram reuniões da investigadora com cada uma das professoras, dependendo da disponibilidade destas. A familiaridade da investigadora com as professoras não se confinou aqueles encontros de trabalho, estendeu-se várias vezes à convivência informal nos intervalos para café ou nos períodos de lanche. O Quadro 6.2. traduz de forma resumida, as fases do programa de sensibilização.

Após os primeiros contactos com as professoras, em Julho de 1995, onde lhes foi pedida colaboração para este estudo, a investigadora, no primeiro encontro em final de Setembro, apresentou esclarecimentos sobre o projecto de investigação, as intenções dos ambientes de ensino a implementar com os alunos e um esboço dos planos para os implementar. Também foram fornecidos textos que convidavam as professoras à reflexão sobre a importância da geometria no 1º ciclo do Ensino Básico (Costa, 92), sobre a geometria e sentido espacial (Del Grande, 1990; NCTM, 1991) e sobre as transformações nos 1ºs e 2ºs ciclos do Ensino Básico (Sanok, 1987) para serem discutidos em encontros futuros. Foi ainda estipulado um horário semanal de trabalho (a ser revisto todas as semanas).

Quadro 6.2. Fases do programa de sensibilização das professoras participantes aos ambientes de ensino.

Momento	Conteúdo
Setembro 95	Esclarecimentos sobre o projecto de investigação. Programaram-se os encontros de trabalho. Foram fornecidos textos para serem lidos e mais tarde discutidos.
Outubro 95	Análise e reflexão conjunta da investigadora e professoras sobre os textos dados. Exame do currículo de matemática do 1º ciclo para se identificar actividades relacionadas com o sentido espacial e com as transformações geométricas, translação, rotação e reflexão.
Novembro 95	Foram analisadas pelas professoras as primeiras versões das 1ª e 2ª sessões dos ambientes de ensino.
Dezembro 95	A primeira versão da 3ª sessão do ambiente de ensino, e uma versão de uma sessão introdutória examinadas.
Janeiro 96	As professoras iniciaram a sua familiarização com o micromundo. Foram analisadas por ambas as professoras as primeiras versões das 4ªs, 5ª, 6ª 7ª e 8ª (que envolvia o uso do micromundo) sessões de ensino.
Fevereiro 96	As professoras continuaram a sua familiarização com o micromundo. Foram analisadas, por ambas as professoras, as seguintes primeiras versões das sessões: 8ª (aquela que envolvia o uso de materiais manipulativos não tecnológicos), 9ª, 10ª e 11ª sessões.
Março 96	As professoras continuaram a sua familiarização com o micromundo. As primeiras versões das 12ª e 13ª sessões de ensino foram analisadas pelas professoras. As tarefas geométricas a ser administradas aos alunos pela investigadora foram apresentadas às professoras. Materiais e versões finais das sessões de ensino foram apresentados às professoras para serem agora por elas adaptados às suas turmas.
Abril, Maio, Junho 96	Sensibilização durante a implementação dos ambientes de ensino que dão ênfase aos movimentos virar, rodar e deslizar na turma A e na turma B.

Em Outubro, foram feitos quatro encontros de trabalho com as professoras, que envolveram: o reflectir em conjunto sobre os textos dados ou parte deles; o analisar pelas professoras, de certas tarefas geométricas a fim de averiguar que tipos de capacidades espaciais essas tarefas podiam desenvolver, tendo por apoio o artigo *Visualização espacial: algumas actividades* (Matos e Gordo, 1993); o relembrar das características das transformações geométricas translação, rotação e reflexão; o examinar do currículo de

matemática do 1º ciclo do Ensino Básico (Ministério da Educação, 1990) para serem identificadas as actividades que estão relacionadas com o sentido espacial e com translação, rotação e reflexão.

Também nesta altura as professoras apontaram a necessidade de, antes da experiência educativa, os seus alunos terem uma sessão, a que designaram por sessão introdutória, para que alguns conceitos lhes fossem lembrados: meia volta, quarto de volta, direcção, sentido, eixo horizontal, eixo vertical, direcções paralelas e direcções perpendiculares. Foi também fornecido às professoras (a seu pedido) uma tradução do artigo *A dynamic way to teach angle and angle measure* (Wilson e Adams, 1992) o qual foi lido e interpretado em conjunto.

Em Novembro, o programa de sensibilização envolveu três encontros com cada professora e foram analisadas as primeiras versões das 1ª e 2ª sessões de ensino tendo em linha de conta: os objectivos, os conhecimentos desenvolvidos, as dificuldades sentidas pelas professoras, a antecipação das possíveis dificuldades dos alunos, a organização da aula, a adequação das tarefas e sugestões. Foram ainda examinadas questões didácticas à volta dos seguintes conceitos: ângulo, direcção, sentido, eixo horizontal e eixo vertical. Foi também fornecido às professoras um artigo sobre o construtivismo (Noddings, 1990). Nos quatro encontros de trabalho de Dezembro foi examinada a primeira versão da 3ª sessão de ensino, e a primeira versão de uma sessão introdutória.

Em Janeiro, cada professora teve nove encontros de trabalho que abarcaram não só a primeira familiarização com o micromundo Tarta, como também a análise das primeiras versões das seguintes sessões de ensino: 4ªs, 5ª, 6ª 7ª e 8ª (apenas a que envolvia o uso do TARTA). Havia então duas versões da quarta sessão e da oitava sessão, umas eram para a turma A e as outras para a turma B. Pretendia-se que estas sessões tivessem objectivos equivalentes só diferindo pelo material de ensino a usar. Assim as sessões para a turma A envolviam tarefas que usavam o micromundo Tarta e as sessões para a turma B envolviam tarefas que usavam só materiais manipuláveis sem computador.

Em Janeiro só foi analisada a 8ª sessão relacionada com o uso do TARTA. Foram então feitas discussões sobre as sessões seguindo os esquemas anteriores e juntando agora a preocupação de discernir as semelhanças, diferenças e equivalências dos dois tipos de actividades referentes às 4ªs sessões. O texto sobre o construtivismo foi também analisado em Janeiro, e houve a preocupação de se identificar as consequências para o processo educativo em se adoptar uma posição construtivista.

Os cinco encontros de sensibilização de Fevereiro envolveram não só a continuação da familiarização com o micromundo como também a análise seguindo os esquemas anteriores, das seguintes primeiras versões de: 8ª (envolia só manipuláveis sem computador), 9ª, 10ª e

11^{as} sessões. Havia então duas 11^{as} sessões, uma era para a turma A e a outra para a turma B. Pretendia-se que as 11^{as} sessões tivessem objectivos equivalentes diferindo então pelo material de ensino a usar. Assim, a 11^a sessão para a turma A envolvia tarefas que usavam o micromundo Tarta e a 11^a sessão para a turma B envolvia tarefas que usavam só materiais manipuláveis sem computador.

Em Março, as quatro sessões de sensibilização com cada professora incluíram: a familiarização com o micromundo Tarta; o examinar das primeiras versões das duas sessões 12^a e das duas sessões 13^a dos ambientes de ensino. Foram também mostradas às professoras as tarefas geométricas a serem administradas aos alunos pela investigadora. Finalmente materiais para os ambientes de ensino e as versões finais das sessões desses ambientes de ensino foram apresentados nesta altura às professoras para serem agora por elas adaptadas às suas turmas e implementadas.

Nos meses de Abril e Maio, altura das intervenções educativas, existiram encontros de trabalho muito curtos geralmente após cada sessão de ensino. Por vezes, mesmo nos intervalos, as professoras e a investigadora reflectiram sobre o que tinha acontecido na aula, o que tinha ou não tinha sido feito, como os alunos tinham reagido, o que devia ser mudado e ultimava-se a preparação da sessão seguinte, incluindo a distribuição de tarefas. Para este programa de sensibilização foi por vezes difícil encontrar tempos livres para os encontros de trabalho de forma a não desorganizar as vidas pessoais das professoras.

Este programa de apropriação dos ambientes de ensino pelas professoras e também de reflexão conjunta com a investigadora foi de grande importância para esta, pois permitiu-lhe tomar consciência do que realmente poderia trabalhar na aula, que conceitos precisavam de ser mais desenvolvidos, o que as professoras pensavam e sentiam, bem como o que podiam fazer. Foram então reconhecidas algumas dificuldades na preparação das professoras porque o que elas precisavam de trabalhar com os seus alunos não era o que habitualmente faziam.

Foram feitas adaptações aos planos iniciais dos ambientes de ensino, destacando-se a necessidade de a investigadora fazer trabalho em equipa com cada uma das professoras na leccionação das respectivas turmas. Contudo, na aula, a distribuição da leccionação à turma foi feita de acordo com os interesses das professoras e estes eram função da familiaridade e à vontade da professora no conteúdo a ser abordado.

6.5. Análise dos níveis de desenvolvimento geométrico

Nesta secção serão analisados os níveis de desenvolvimento geométrico, para movimentos elementares, manifestados pelos alunos das duas turmas do estudo, tendo por

base as suas respostas individuais às tarefas II, III, V, VIII (A) e VIII(C), antes e depois da experimentação do ambiente de ensino; e analisadas possíveis alterações, nesses níveis, após aquela intervenção didáctica. Para isso, usamos a extensão do modelo de Van Hiele para movimentos geométricos na escola elementar, desenvolvida por Clements e Battista (Johnson-Gentile, 1990) e validada por Lewellen (1992) (secção 3.5.3). A codificação relativa aos descritores dos níveis de pensamento para movimentos é então baseada na codificação de Lewellen (1992).

Para tratar as respostas dos alunos às tarefas geométricas II, III, V, VIII (A) e VIII(C) e por estas respostas determinar os seus níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares foi usada uma codificação baseada na de Lewellen (1992), tendo sido feitos alguns acréscimos às descrições de alguns códigos, pois se sentiu essa necessidade (secção 3.5.3). A codificação de Lewellen é baseada na sofisticação da resposta, com o código mais elevado (7) atribuído a respostas que identificaram os movimentos (virar, rodar e deslizar), explicitando todas as componentes e nomeando correctamente essas componentes. Código 0 significa que o movimento não foi mencionado e identifica o *nível 0 (Pré-reconhecimento)* de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. Os códigos 1-5 representam respostas de sofisticação crescente de *nível 1 (Visual)* de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. O código 6 representa *transição* do nível 1 (*Visual*) para o *nível 2 (Descritivo/Analítico)*. A designação *de transição* foi usada para aqueles estudantes que pareciam estar a prestar atenção às preocupações de um nível mais elevado, enquanto ainda usavam a linguagem de um nível mais baixo ou estavam a oscilar entre níveis. O código 7 representa *nível 2 (Descritivo/Analítico)* de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. O *nível 3 (Abstracto/relacional)* não foi determinado para estas tarefas, a sua determinação implicaria que tivéssemos sondado os alunos sobre relações entre movimentos.

6.5.1. Resultados da codificação das respostas de alunos das duas turmas

O Quadro 6.3 mostra a codificação para movimentos relativa às tarefas: II, III, V, VIII (A) e VIII (C) realizadas por alunos da turma A.

Quadro 6.3. Codificação para movimentos em tarefas realizadas por alunos da turma A

Alunos	Antes do ambiente de ensino		Depois do ambiente de ensino	
Abel	rodar	0, 0, 1, 4, 5	rodar	4, 5, 4, 6, 5
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 4, 3, 6, 0
	virar	0, 2, 0, 3, 2	virar	0, 5, 7, 6, 6
Barbara	rodar	0, 0, 0, 2, 0	rodar	0, 5, 4, 6, 6
	deslizar	0, 0, 0, 1, 1	deslizar	0, 4, 0, 4, 0
	virar	0, 1, 2, 0, 4	virar	3, 5, 0, 5, 6
Carlota	rodar	0, 0, 3, 0, 0	rodar	0, 3, 3, 3, 4
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 3, 3, 3, 0
	virar	0, 3, 0, 3, 0	virar	0, 3, 3, 3, 3
Delfim	rodar	0, 0, 0, 2, 2	rodar	0, 4, 4, 5, 4
	deslizar	0, 0, 0, 2, 0	deslizar	0, 4, 0, 4, 0
	virar	0, 1, 3, 3, 3	virar	0, 5, 0, 5, 4
Edgar	rodar	0, 0, 0, 0, 2	rodar	0, 5, 5, 5, 5
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 4, 3, 6, 0
	virar	0, 1, 1, 2, 3	virar	0, 5, 5, 6, 6
Felisberta	rodar	0, 1, 0, 1, 5	rodar	0, 4, 4, 5, 5
	deslizar	0, 0, 0, 1, 0	deslizar	0, 4, 4, 3, 0
	virar	0, 2, 0, 1, 4	virar	0, 5, 2, 6, 6
Gil	rodar	0, 0, 0, 1, 2	rodar	0, 2, 5, 2, 5
	deslizar	0, 0, 0, 1, 0	deslizar	0, 4, 0, 4, 3
	virar	0, 0, 0, 0, 2	virar	0, 2, 0, 2, 2

Analisemos por exemplo, os códigos das respostas do aluno Abel. Na sequência de códigos “0, 0, 1, 4, 5” relativamente ao movimento rodar antes do ambiente de ensino, os números dos códigos da esquerda para a direita são os correspondentes às tarefas II, III, V, VIII (A) e VIII (C) respectivamente. Abel, ao responder à tarefa II antes do ambiente de ensino, não mencionou o movimento rodar (código 0), o que poderia querer dizer que a tarefa para ser executada não precisava daquele movimento ou que ele não foi identificado porque era desconhecido. Contudo para a tarefa VIII (A), antes do ambiente de ensino, Abel usa agora o termo “rodar” e tem em conta um dos três parâmetros para a rotação: centro de rotação, quantidade a rodar e direcção da rotação (código 4); o que nos permite referir que o movimento rodar lhe era familiar. Abel ao responder às mesmas tarefas, depois do ambiente de ensino, para a tarefa II já usa o termo rodar tendo em conta um dos três parâmetros (código

4) e para a tarefa VIII (A) usa o termo rodar, tendo em conta os três parâmetros, mas comete um erro nas especificações (código 6).

Parece que a forma de responder às tarefas vai depender também do tipo de tarefa ou de quando a tarefa é administrada. O aluno Abel, para resolver as cinco tarefas antes do ambiente de ensino, nunca usou o movimento deslizar (todas as tarefas estão codificadas com 0) o que parece querer dizer que para ele este movimento era desconhecido ou talvez as tarefas não precisavam desse movimento para serem resolvidas. Contudo, após o ambiente de ensino, Abel usou o movimento deslizar na tarefa III (código 4), na tarefa V (código 3), e na tarefa VIII (A) (código 6), tendo na resposta a esta última tarefa uma codificação que significa que usa o termo desliza e especifica tanto a quantidade como a direcção do deslize mas comete algum erro na especificação. O aluno Abel, antes do ambiente de ensino, usa uma linguagem informal, tentando ser preciso, ao falar do movimento virar (tarefas III, VIII (C), código 2) e usa o termo “virar” mas não especifica linha de viragem na resposta à tarefa VIII (A) (código 3). Após o ambiente de ensino há uma grande mudança no uso do movimento virar onde é usado correctamente (código 7) ou quase correctamente (código 6 e código 5).

Reparemos ainda nas resposta de Abel à tarefa V antes e depois do ambiente de ensino. Houve uma mudança de uso de um só movimento, o rodar, usando uma linguagem informal, para o uso dos três movimentos, depois do ambiente de ensino, com códigos bastantes diferentes: rodar, código 4; deslizar, código 3; e virar, código 7.

A tarefa II foi resolvida, antes do ambiente ensino, sem que algum aluno tivesse usado a linguagem dos movimentos elementares, mas após o ambiente de ensino, já o aluno Abel para resolver essa tarefa usou o movimento rodar e teve em conta um dos três parâmetros (código 4). Também a Bárbara para a tarefa II, após o ambiente de ensino, usou o termo “virar” mas não especificou a linha de viragem (código 3).

Quase todos os alunos resolveram, após o ambiente de ensino, a tarefa VIII (C) sem usar o movimento deslizar, excepto o Gil, o que poderá querer dizer que a tarefa poderia ser resolvida sem utilização do movimento deslizar. Depois do ambiente de ensino, os alunos quase que não diminuíram o número de tarefas onde para as respectivas respostas usaram a linguagem dos movimentos elementares, excepto o aluno Delfim que tinha usado o movimento virar em quatro tarefas e depois só usou em três (não o usou na tarefa V). Para quase todos os alunos e para quase todos os movimentos, houve sofisticação das respostas das tarefas, isto é, respostas com código mais elevado, após o ambiente de ensino. Só o aluno Gil usou sempre uma linguagem informal (código 2) para o termo “virar” nas diferentes tarefas, antes e depois do ambiente de ensino.

O Quadro 6.4 mostra agora a codificação para movimentos relativa às tarefas II, III, V, VIII (A) e VIII (C) realizadas por alunos da turma B.

Quadro 6.4. Codificação para movimentos em tarefas de alunos da turma B.

Alunos	Antes do ambiente de ensino		Depois do ambiente de ensino	
Aldino	rodar	0, 1, 0, 2, 2	rodar	0, 5, 0, 5, 6
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 3, 3, 4, 0
	virar	0, 0, 1, 2, 2	virar	0, 3, 4, 4, 4
Berta	rodar	0, 0, 0, 0, 0	rodar	0, 4, 4, 4, 4
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 4, 0, 4, 4
	virar	0, 1, 0, 1, 0	virar	0, 4, 5, 5, 4
Carolino	rodar	0, 0, 0, 0, 5	rodar	0, 5, 0, 4, 5
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 4, 0, 4, 3
	virar	0, 0, 1, 1, 4	virar	0, 5, 0, 6, 4
Dália	rodar	0, 0, 0, 1, 2	rodar	0, 4, 4, 0, 5
	deslizar	0, 0, 0, 1, 0	deslizar	0, 3, 5, 5, 0
	virar	0, 0, 0, 1, 3	virar	0, 5, 0, 5, 5
Ester	rodar	0, 0, 0, 3, 3	rodar	0, 5, 0, 2, 0
	deslizar	0, 0, 0, 0, 0	deslizar	0, 4, 0, 3, 3
	virar	0, 0, 0, 3, 3	virar	0, 5, 0, 3, 3

Analiseemos também, como exemplificação, os códigos das respostas da aluna Berta. Antes do ambiente de ensino a Berta, ao responder às cinco tarefas, só usou o termo “virar” em duas das tarefas: III e VIII (A) e numa linguagem informal e imprecisa (código 1). Depois do ambiente de ensino a Berta usou os três movimentos elementares na tarefas III, na tarefa VIII (A) e na tarefa VIII (C), os movimentos rodar e virar na tarefa V e, não usou os movimentos elementares na execução da tarefa II. Ainda, para as quatro tarefas onde usa os movimentos: quando usa o movimento rodar tem em conta só um dos três parâmetros: centro, quantidade e direcção (código 4); quando usa o movimento deslizar só especifica um parâmetro ou a quantidade ou a direcção (código 4); quando usa o termo “virar” umas vezes não especifica a linha de viragem (código 4), outras especifica a linha de viragem mas sem precisão (código 5). De facto pode dizer-se que para a aluna Berta houve alteração de nível de desenvolvimento geométrico para movimentos, após a intervenção didáctica.

A tarefa II foi resolvida por todos os alunos, antes e depois do ambiente de ensino, sem terem usado os movimentos deslizar, rodar e virar. Depois do ambiente de ensino, os

alunos não diminuiram o número de tarefas onde para as respectivas respostas usaram a linguagem dos movimentos elementares. Para quase todos os alunos e para quase todos os movimentos, houve sofisticação das respostas das tarefas, isto é, respostas com código mais elevado, após o ambiente de ensino. Só a aluna Ester na resposta à tarefa VIII (A) quando usou o movimento rodar após o ambiente de ensino usou uma linguagem informal (código 2), apesar de já ter usado, antes do ambiente de ensino, o termo “rodar” não especificando contudo, o centro de rotação, a direcção de rotação ou quantidade a rodar (código 3).

6.5.2. Níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos manifestados pelos alunos das duas turmas

O Quadro 6.5 e o Quadro 6.6 evidenciam os níveis para movimentos manifestados pelos alunos da turma A e da turma B antes e depois de serem sujeitos ao ambiente de ensino que dá ênfase às transformações geométricas via os movimentos rígidos: virar, deslizar e rodar. O Quadro 6.5 e o Quadro 6.6 foram construídos a partir da codificação das respostas às tarefas evidenciadas no Quadro 6.3 e no Quadro 6.4 respectivamente.

Note-se que para o mesmo movimento e nas diferentes respostas às tarefas, pode ter códigos diferentes. O código que vai caracterizar o estudante é aquele que, para o mesmo movimento, aparecer com maior frequência nas respostas às tarefas. Contudo, se para o mesmo movimento, todos os códigos atribuídos às tarefas forem diferentes, ao estudante ser-lhe-á dado o código mais baixo. Se houver códigos iguais aos pares, usa-se o código diferente para desempatar, por exemplo a sequência de códigos 0, 2, 0, 3, 2 pertence ao nível 1, porque 3 é um código do nível 1.

Para um estudante que pareça estar em transição (código 6) entre o nível 1 (Códigos 1-5) e nível 2 (Código 7), essa transição vai ser designada pelo código “1,5”. Esta designação de código não foi feita para criar um novo nível, é só um símbolo que mostra que um estudante de nível 1 estava a mostrar sinais de se mover para um novo nível mais alto. Ainda será acrescentado o símbolo + a todo o nível de movimento dum estudante para realçar que ele tem uma resposta cujo código pertence ao nível seguinte do nível que lhe foi atribuído. Se lhe é acrescentado o símbolo + + isso quer significar que o estudante tem duas respostas cujos códigos pertencem ao nível seguinte do nível que lhe foi atribuído.

Quadro 6.5. Níveis para movimentos atingidos pelos alunos da turma A.

	Deslizar		Virar		Rodar	
	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino
Abel	0	1	1	“1,5”+	1	1
Barbara	0++	0++	1	1	0+	“1,5”
Carlota	0	1	0++	1	0+	1
Delfim	0 +	0++	1	1	0++	1
Edgar	0+	1	1	1	0+	1
Felisberta	0+	1	1	“1,5”	1	1
Gil	0+	1	0 +	1	0++	1

De acordo com o Quadro 6.5, para os sete alunos da turma A, após a intervenção didáctica houve alterações um pouco significativas nos níveis de desenvolvimento geométrico, *nível 0* para *nível 1*, sendo contudo mais significativas aquelas que evidenciam *transição* do nível 1 para o nível 2 dos alunos Abel, e Felisberta relativamente ao movimento virar e designadas por “1,5”. Parece também ser uma alteração representativa a da aluna Bárbara que altera o *nível 0* para um estado de *transição* do nível 1 para o nível 2, relativamente ao movimento rodar, designação “1,5”. Para os alunos que não mudaram de nível para alguns movimentos, verifica-se no entanto, cruzando com a informação dada pelo quadro 6.3, que há sofisticação das respostas com códigos mais elevados, após a intervenção didáctica.

Para os cinco alunos da turma B, a situação é análoga à da turma A no sentido que estão patentes alterações nos níveis de desenvolvimento geométrico, *nível 0* para *nível 1*, para quase todos os estudantes e para todos movimentos (Quadro 6.6). O aluno Aldino para os movimentos virar e rodar não mudou de nível de desenvolvimento geométrico, após o ambiente de ensino; contudo, se repararmos no Quadro 6.4, para aqueles movimentos, há sofisticação das respostas com códigos mais elevados. Também o aluno Carolino não mudou de nível relativamente a virar mas verifica-se também sofisticação das respostas com códigos mais elevados. Para a aluna Ester são reduzidas as alterações de nível de desenvolvimento geométrico relativamente ao movimento rodar.

Quadro 6.6. Níveis para movimentos atingidos pelos alunos da turma B

	Deslizar		Virar		Rodar	
	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino	Nível antes do ambiente de ensino	Nível depois do ambiente de ensino
Aldino	0	1	1	1	1	1
Berta	0	1	0++	1	0	1
Carolino	0	1	1	1	0 +	1
Dália	0 +	1	0++	1	0++	1
Ester	0	1	0++	1	0++	0++

Duma forma global, poder-se-á dizer que, para os alunos das duas turmas, antes da intervenção didáctica, os termos dos movimentos elementares “deslizar”, “virar” e “rodar” já faziam parte dos seus vocabulários do dia a dia, sendo o termo “deslizar” aquele com que estavam menos familiarizados. O desenvolvimento geométrico relativo a movimentos estava contudo fundamentalmente restrito ao uso informal dos termos ou ao uso correcto mas sem especificar as características daqueles movimentos.

Após o ambiente de ensino, a maioria dos alunos das duas turmas usa correctamente os termos dos movimentos e especifica as respectivas características, cometendo alguns erros. Parece poder ser dito que: a turma A, no global, atingiu códigos mais elevados; para alguns alunos das duas turmas houve alteração de nível zero (*Pré-reconhecimento*) para nível 1 (*Visual*) de desenvolvimento geométrico para movimentos; todos os alunos individualmente ao responderem às tarefas geométricas, após a intervenção didáctica, mostraram pertencer ao nível *visual* de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares na classificação desenvolvida por Clements e Battista (Johnson-Gentile, 1990); três alunos da turma A mostram estar em transição do nível *Visual* para o nível *Descritivo/analítico*, dois alunos relativamente ao movimento virar e um aluno relativamente ao movimento rodar.

Capítulo VII

Conclusões e recomendações

Este capítulo começa por fazer, numa primeira secção, um breve resumo do estudo, essencialmente os seus objectivos e a metodologia de investigação utilizada. Numa segunda secção relacionada com a resposta às questões específicas do modelo, dá, primeiro de forma sucinta, resposta às questões relativas à arquitectura do modelo para o pensamento visual-espacial, propõe depois a versão final do modelo e julga do modelo para o pensamento visual-espacial, tendo em conta os critérios de Alan Schoenfeld. Na terceira secção o capítulo fala do nível de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares evidenciados pelos alunos. Finalmente numa quarta secção, oferecemos recomendações para o ensino e para futura investigação em educação matemática.

7.1. Resumo do estudo

Este estudo pretende elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial, bem como desenvolver, isto é, conceber, implementar e avaliar dois modelos didácticos para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. Pretendia-se em particular: compreender o desenvolvimento do pensamento visual-espacial dos alunos, identificando os modos de pensamento visual-espacial e exemplificando como esses modos de pensamento visual-espacial foram sócio-culturalmente vividos; identificar processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial que os alunos utilizaram na execução de tarefas geométricas com ênfase especial nos mecanismos conceptuais metáforas e gestos; reconhecer o nível desenvolvimento geométrico evidenciado pelos alunos.

O estudo começou com a elaboração dum modelo teórico inicial referente ao pensamento visual-espacial onde foram destacados três modos de pensamento visual-espacial: modo PVP, modo PVMM/PVR e modo PVE. Este modelo por sua vez era o resultado da

combinação do senso comum com conjecturas, afirmações e preocupações vindas da leitura da literatura científica disponível sobre o pensar visual e o pensar espacial.

Com a construção teórica do modelo coexistiu uma investigação empírica que se focou em dois ambientes de ensino para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial, no contexto da exploração e compreensão das isometrias (translação, reflexão e rotação), usando os movimentos rígidos (deslizar, virar e rodar) por alunos do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico de duas escolas públicas da cidade de Coimbra. Os ambientes de ensino incidiam sobre o mesmo tópico, só que num deles as tarefas atribuídas aos alunos, na aula, envolviam apenas actividades com material manipulável (não tecnológico) e no outro ambiente de ensino eram atribuídas tarefas mistas, no sentido que os alunos podiam estar envolvidos, na aula, em actividades com computador (micromundo Tarta, especialmente concebido para o estudo) e em actividades com material manipulável (não tecnológico). O micromundo Tarta pretende semear e explorar ideias tais como translação, reflexão e rotação, através dos movimentos rígidos deslizar, virar e rodar. As sessões nos ambientes de ensino foram construídas de forma que as respectivas actividades reflectissem também tanto quanto possível, a sequência das fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. Foram ainda determinados os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos doze alunos do estudo antes e depois da experimentação dos ambientes de ensino e analisadas possíveis alterações, nesses níveis, após aquelas intervenções didácticas. Servi-me para isso das respostas individuais dos alunos do estudo a tarefas geométricas e da extensão do modelo de Van Hiele para movimentos geométricos na escola elementar, desenvolvida por Douglas Clements e Michael Battista. Foi também usada uma codificação relativa aos descritores de níveis de pensamento para movimentos, baseada na codificação de Hester Lewellen.

A metodologia da investigação é de natureza qualitativa integrando a análise e interpretação de transcrições de registos vídeos das respostas individuais de doze alunos a tarefas geométricas antes e depois do ambiente de ensino onde foram revelados e caracterizados empiricamente modos de pensamento visual-espacial e processos de pensamento associados a esses modos. Também com o mesmo fim, foram analisadas e interpretadas as transcrições de registos vídeos das execuções de duas tarefas geométricas feitas, em actividade de aula, por dois pares de alunos que trabalhando em diade, usaram o micromundo Tarta. Pretendia-se assim validar o modelo teórico inicial para o pensamento visual-espacial. A influência da dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento visual-espacial foi também procurada, examinando e analisando transcrições de registos vídeos relativas às execuções das tarefas geométricas. Os dados foram organizados em episódios, os

quais foram distribuídos por categorias de classificação: modo PVP, modo PVMM, modo PVR, modo PVE e dimensão sócio-cultural. Depois os episódios foram descritos, analisados e interpretados no sentido de estruturar o modelo teórico elaborado com uma abordagem metodológica próxima da do método de comparação constante identificado por Glaser (citado em Bogdan e Biklen, 1994). Uma versão refinada do modelo de pensamento visual-espacial foi então elaborada e avaliada segundo os critérios da Alan Schoenfeld.

7.2. Resposta a questões específicas do modelo

Nesta secção dá-se resposta às duas primeiras questões relativas à arquitectura do modelo, depois propõe-se a versão final do modelo teórico para o pensamento visual-espacial e finalmente valida-se o modelo para pensamento visual-espacial, tendo em conta os critérios de Alan Schoenfeld, respondendo às oito questões seguintes.

7.2.1. Divisão do modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e da construção mental da relação entre imagens

Na primeira questão relacionada com o modelo, pretendia-se saber, se seria necessário dividir o modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens e da construção mental da relação entre imagens em dois modos distintos. Foi sentida, quase desde o início da análise dos dados, a necessidade proceder a essa separação. Todos os alunos frequentemente, usaram o modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens, quando lidavam com tarefas geométricas. Imagens dinâmicas e antecipatórias foram usadas e transformadas mentalmente; e imagens cinestésicas foram evidenciadas por gestos icónicos. A abstracção foi feita muitas vezes baseada das próprias acções dos alunos sobre objectos especialmente sobre o Tarta. Em quase todos os episódios só se encontrou manipulação mental de imagens, mas isolada, o que parece indicar uma autonomia do modo PVMM.

Um aluno usou de forma inequívoca o modo PVR, revelando-se então este claramente distinto do modo PVMM. Neste sentido o modelo deve distinguir os dois modos para poder melhorar o seu poder explicativo. Os processos mentais associados ao modo PVR são cognitivamente de ordem mais elevada que os processos mentais associados ao modo PVMM.

Ainda neste estudo foi identificada ausência notória, nos alunos dum grupo, da vivência do modo de pensar visual-espacial ligado à construção de relações entre imagens. Se o pensar daqueles alunos tivesse estado ligado à construção mental de relações entre imagens,

provavelmente tê-los-ia afastado do enfado de repetições de processos e ter-lhes-ia proporcionado o desenvolvimento de esquemas de metacognição e mesmo de esquemas de programação.

7.2.2. *A dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento visual-espacial*

Uma outra questão relacionada com o modelo era compreender como os modos de pensamento visual-espacial dos alunos são influenciados na aula pela dimensão sócio-cultural. A investigação desta dimensão esteve ligada às interacções entre os alunos das díades, à intervenção da investigadora e às interacções com o micromundo Tarta.

Os modos de pensamento visual-espacial dos alunos nas díades, foram influenciados pela interacção mútua entre os próprios alunos principalmente para os alunos do grupo 1, os quais executaram com sucesso na aula as duas tarefas, usando o micromundo Tarta, sem apoio de ninguém. O pensamento visual-espacial que ocorreu nas mentes daqueles alunos foi socialmente vivido, acompanhado de gestos sociais. Os modos de pensamento visual-espacial dos dois alunos nem sempre foram simultaneamente os mesmos. As interacções entre o Abel e o Delfim fizeram com que vivessem os vários modos de pensamento visual-espacial, o que provavelmente não fariam, se cada um trabalhasse sozinho. Na tarefa *flor*, cada aluno e o micromundo Tarta foram pelo menos uma vez interventores do pensamento visual-espacial do outro aluno, actuando na respectiva ZDP e fazendo com que esse aluno se envolvesse no modo PVMM. O envolvimento dos alunos no uso do micromundo Tarta foi em simultâneo com as interacções entre os alunos do grupo, e fez emergir significados e despoletar para cada aluno da díade os vários modos de pensamento visual-espacial. Foram evidenciadas dois tipos de sequências de modos de pensamento visual-espacial nos alunos do grupo 1: a *sequência* que vou designar do *tipo I*, PVP → PVMM e a *sequência* que designo do *tipo II*, PVMM → PVR.

De forma diferente deste primeiro grupo, o pensamento visual-espacial que ocorreu nas mentes dos alunos do grupo 2 foi fortemente mediado pela intervenção da investigadora. Fundamentalmente na execução da tarefa *flor*, os alunos deste grupo interagindo entre si, quase nunca conseguiram ultrapassar os obstáculos que encontravam, os quais tinham a ver nomeadamente com conhecimentos de esquemas geométricos e de programação, com a capacidade de estruturação espacial e com a construção de imagens antecipadoras. A interacção social no grupo 2 para a tarefa *flor* fez-se segundo um esquema cíclico em que às interacções entre os dois alunos (onde em colaboração tentam prosseguir na tarefa) se segue a intervenção da investigadora (onde mais uma fatia da tarefa era pensada e executada em

conjunto) e depois se segue os alunos do grupo tentarem novamente continuar a execução da tarefa. A mediação da investigadora no grupo era directa, ora com perguntas aos alunos, tentando intervir como suporte nas ZDPs dos alunos para que se apropriem dos modos de pensamento PVP ou PVMM, ora com diálogos e encorajando gestos de forma que eles partilhassem as suas formas de pensar. A investigadora usou frequentemente na sua intervenção pedagógica a sequência PVP → PVMM de modos de pensamento visual-espacial. O processo de mediação do micromundo Tarta neste grupo desenvolveu-se a dois níveis, por um lado significados e modos de pensamento emergiram do envolvimento dos alunos no uso do micromundo, por outro, foi usado pela investigadora para guiar a evolução dos significados dentro do grupo. A execução autónoma da tarefa *flor* pelos alunos do grupo 2 nunca foi atingida, mesmo tendo havido pensamento visual-espacial partilhado e apoiado na construção de significados pelo micromundo Tarta. Não é possível ter-se a garantia que os alunos se apropriaram dos diferentes modos de pensamento visual-espacial. Por exemplo, a investigadora usou gestos para que os alunos tivessem a percepção das linhas de simetria da *flor*, mas esses gestos da investigadora tiveram consequências nas abstracções dos alunos? A hipótese de Alexandra Mariotti (2002, p. 708) sobre “os significados são enraizados na experiência fenomenológica, mas a sua evolução é atingida por meio de construção social na aula, sob a ajuda do professor” parece neste contexto poder ser problemática.

Às diferentes mediações do micromundo Tarta, no uso pelos alunos dos modos de pensamento visual-espacial, já identificadas, quero juntar um outro nível de intervenção que o TARTA traz para o pensamento visual-espacial dos alunos. Apropriando-me das ideias de Clements e Sarama (1997) sobre a actividade de programação da tartaruga do Logo, digo então que o micromundo Tarta pode ser visto como uma metáfora para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial, produzindo metáforas interrelacionadas: o uso do TARTA como ambiente geométrico, o uso do TARTA como robot, o uso do TARTA como diversão, o uso do TARTA como ligação.

A relação que os alunos estabeleceram com as tarefas geométricas administradas pela investigadora, com o ambiente de ensino e fundamentalmente com o micromundo Tarta pareceu constituir quase sempre um factor mobilizador do seu interesse e de grande envolvimento. No entanto, os alunos muitas vezes, não encaravam as actividades vividas como actividades de matemática.

7.2.3. Modelo final para o pensamento visual-espacial

O modelo final para a compreensão do pensamento visual-espacial vai distinguir quatro modos diferentes de pensar: o pensamento visual-espacial resultante da percepção, modo PVP; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens, modo PVMM; o pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens, modo PVR; o pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão-comunicação e representação, isto é, à exteriorização do pensamento, modo PVE. O Quadro 7.1 apresenta as definições destes quatro modos de pensamento visual-espacial.

Quadro 7.1. Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições, contemplados no modelo final de pensamento visual-espacial.

Modos de pensamento visual-espacial	Definição de cada modo de pensamento visual-espacial
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP).	Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial e de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens (PVMM).	Operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens.
Pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens (PVR).	Operações intelectuais relacionadas com a construção mental de relações entre imagens, a comparação de ideias, conceitos e modelos.
Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE).	Operações intelectuais relacionadas com a representação, a tradução e a comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Cada modo de pensamento vai ter associado diversos processos mentais que foram discutidos no capítulo IV e que aqui apresento resumidamente com as alterações resultantes da divisão do modo PVMM/PVR. Para o modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, os processos mentais que lhe vão estar associados são: intuições primárias; construção visual, avaliação e re-apresentação de imagens; reconhecimentos visuais; identificação de objectos, modelos, formação de um gestalt, apreensão global de uma configuração geométrica; abstracção perceptual; geração de conceitos; uso de metáforas.

Os processos mentais que vão estar associados ao modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens são: intuições secundárias, unificações, transformações mentais, abstracção reflexiva, coordenação, generalização construtiva, estruturação espacial, construção visual. Considero que ao modo de pensamento visual-

espacial resultante da construção mental de relações entre imagens podem ser associados os seguintes processos de pensamento: intuições antecipatórias; descoberta de relações entre imagens, entre propriedades e factos; abstracção reflexiva; metacognição. Os processos mentais que vão estar associados ao modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento são: representações, tradução; descrição da dinâmica mental através da verbalização e gestos; construção de argumentação, de conjecturas; uso de analogias. Nem todos os processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial acima indicados se revelaram no estudo empírico, contudo aquelas suposições de processos para os diferentes modos de pensamento visual-espacial têm grande probabilidade de serem evidenciadas noutras investigações que envolvam outros contextos e alunos de outras faixas etárias.

Os quatro modos de pensamento visual-espacial parecem relacionar-se de acordo com o esquema da figura 7.1 que é uma reformulação da figura 4.2. Com o fim de diferenciar a natureza dos modos de pensamento visual-espacial foram representados dois planos. Num mesmo plano, o plano cognitivo, ficam o modo de pensamento resultante da percepção, o modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens e o modo de pensamento ligado à construção mental de relações entre imagens. Em outro plano, o plano de comunicação, está o modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento, cuja natureza é diferente da dos outros modos, sendo uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial, na medida em que é por seu intermédio que podemos conhecer os outros três modos.

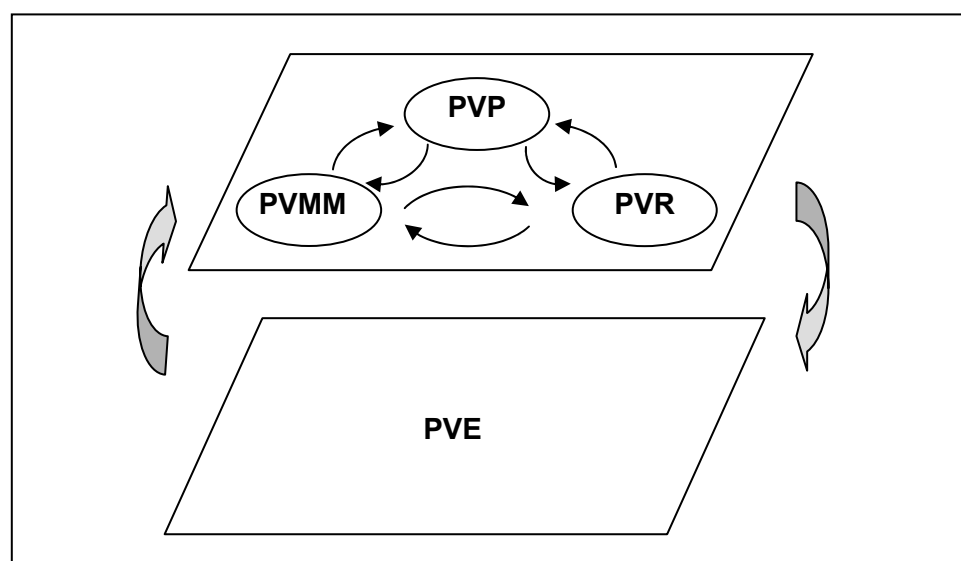


Fig. 7.1. Modos de pensamento visual-espacial

As setas representadas na figura 7.1. querem significar sequências entre os vários modos de pensamento visual-espacial. Ao longo das setas acontece que o aluno muda de modo de pensamento visual-espacial. As setas maiores que ligam os dois planos, traduzem ligações entre cada um dos modos do pensamento visual-espacial: PVP, PVMM e PVR e o PVE. A sequência PVP → PVMM foi identificada muitas vezes quando a investigadora interveio no grupo 2 para ajudar os alunos a construir a tarefa *flor* e tentava actuar nas suas ZDPs. Também a mesma sequência foi revelada nos alunos do grupo 1, quando juntamente com a mediação do micromundo Tarta, cada aluno actuou na ZDP do outro. Vou designar também PVP → PVMM por *sequência pedagógica do tipo I*. A sequência PVMM → PVR já designada como sequência do tipo II foi também revelada.

Afigura-se-me haver uma tendência para uma maior utilização do modo PVP quando surge algum obstáculo, qualquer indecisão por parte dum aluno, ou ausência de familiaridade com o domínio de conhecimento. Os alunos deste estudo ao executarem uma dada tarefa usaram o modo PVMM, contudo, se entretanto surge algum obstáculo, qualquer indecisão por parte dum aluno, eles substituíram-no pelo modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, como apoio para se certificar do que já tinha sido pensado e dar a resposta final, sequência PVMM → PVP que vou designar por *sequência do tipo III*. Esta sequência é semelhante ao fenómeno de redução de nível sugerido por Van Hiele (1986). Também após o ambiente de ensino, os alunos ao responderem às tarefas substituíram muitas vezes o seu pensamento visual-espacial resultante da percepção, por um modo de pensar resultante da manipulação mental de imagens, sustentado por imagens dinâmicas ou então usaram uma integração dos dois modos de pensar: modo PVP e modo PVMM, onde este último modo era tornado explícito, porque os alunos usaram imagens cinestésicas e imagens dinâmicas para descreverem as suas dinâmicas mentais. Posso talvez inferir destes factos a presença influente do corpóreo no pensamento visual-espacial dos alunos.

A possível ligações ou sequência entre o modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção e o modo de pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens e sua inversa não foram reveladas empiricamente nesta investigação. Contudo aquelas conjecturas parecem também poderem sustentar-se em outros contextos e em outras investigações a implementar.

No modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens, os alunos usaram imagens cinestésicas que foram sempre representadas por gestos icónicos. As imagens cinestésicas são usadas quando os alunos vivem o modo de pensar resultante de manipulação de imagens mentais e desconhecem ou não dominam o vocabulário do contexto geométrico com que estão a trabalhar. Os alunos podem ainda usar imagens cinestésicas

quando têm dificuldades em coordenar diferentes estruturas de referência em relações às posições espaciais, que possam a vir a ser definidas e em relação aos objectos abstractos que estão a ser considerados ou em relação a um estrutura externa que ou é fornecida por uma estrutura espacial ou é imposta mentalmente ao espaço: estruturas centradas no observador, estruturas centradas no objecto, estruturas centradas no ambiente.

O tipo de imagética usada no pensamento visual-espacial resultante da percepção, tem a ver com imagens de concretas e imagens de memória. Imagens cinestésicas e imagens dinâmicas sustentam o modo de pensamento visual-espacial dos alunos resultante da manipulação de imagens mentais. O modo de pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens, modo PVR, envolve imagens dinâmicas sendo elas fundamentalmente antecipadoras. O modo de pensamento visual-espacial dos alunos resultante da exteriorização de pensamento envolve imagens concretas, de memória, cinestésicas e dinâmicas.

O uso do modo de pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão-comunicação e representação, isto é, à exteriorização do pensamento é condicionado por certas competências do aluno e pode ser condicionante dos outros modos de pensamento visual-espacial. O modo PVE pode então obscurecer ou apagar a dinâmica mental do aluno, contribuindo então para o insucesso da execução da tarefa geométrica se certas competências faltarem aos alunos. Por exemplo, o aluno precisa de conhecer esquemas de acção, isto é, dominar as estruturas responsáveis pelo uso eficiente de software, ter a capacidade de coordenação de diferentes estruturas de referência. Os modos de pensamento visual-espacial, usados por um aluno, dependem da tarefa, das orientações/restrições dadas para a execução dessa mesma tarefa, ferramentas utilizadas e interacções sociais.

Os alunos usaram gestos, como já foi referido, para comunicar a sua dinâmica mental. Na ausência do vocabulário apropriado à geometria das transformações os alunos expressaram a sua dinâmica mental usando gestos que eram consistentes com a manipulação mental. Contudo esses gestos não eram consistentes com a fala. Durante as actividades da sala de aula quando o micromundo Tarta estava a ser usado, gestos deicticos e icónicos precederam o vocabulário relacionado com as transformações geométricas ou o uso do micromundo Tarta, como se de suportes da dinâmica mental se tratassem. À medida que os alunos se iam familiarizando com o vocabulário específico, os seus gestos começaram a coincidir com a fala e por fim até os gestos quase desapareceram, ficando quase só gestos deicticos. Depois para a descrição da dinâmica mental só o vocabulário do domínio específico era usado ou melhor a descrição começava a ser analítica se bem que por vezes ainda incompleta. O que acabamos de dizer parece corroborar em grande parte as afirmações de Wolff-Michael Roth (2002) que

são conclusões tiradas de vários estudos destinados a compreender os gestos em situações onde estudantes argumentavam cientificamente acerca de modelos gráficos desenhados, modelos gráficos baseados em computador que se movimentam, e modelos tridimensionais de estruturas arquitectónicas.

Metáforas conceptuais estão envolvidas no modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, no modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens e naturalmente no modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento. O processo de metacognição está envolvido no modo de pensamento visual-espacial resultante da relações entre imagens.

7.2.4. Critérios para avaliar o modelo de pensamento visual-espacial

Vamos avaliar o modelo de pensamento visual-espacial proposto, à luz dos oito critérios identificados por Alain Schoenfeld (2002, pp. 456-464). No sentido de mostrar que o modelo teórico de pensamento visual-espacial tem poder descritivo, primeiro critério, podemos afirmar que se revelaram nos dados do estudo os quatro modos de pensamento visual-espacial. O modo PVP dos alunos, que inclui operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial e de memória, evidenciou-se, por exemplo, nos episódios de um a dez (capítulo V). O modo PVMM de pensamento visual-espacial que envolve operações intelectuais relacionadas com a manipulação e transformação mental de imagens, foi pelo menos identificado nos episódios de onze a dezasseis (capítulo V). O modo PVR de pensamento visual-espacial, resultante da construção mental de relações entre imagens e da comparação de ideias, conceitos e modelos só foi revelado claramente no pensamento visual-espacial do aluno Abel, no episódio nove (capítulo V). O modo PVE contém operações intelectuais relacionadas com representação, tradução, descrição da dinâmica mental e comunicação de ideias, conceitos e métodos, e é o condutor dos outros três modos de pensamento visual-espacial, assim o modo PVE dos alunos foi sempre patenteado. Também no modo PVE se identificaram metáforas e gestos. O pensamento metafórico foi evidenciado na linguagem oral dos alunos através de metáforas conceptuais e metáfora do movimento.

Ainda continuando a expor o poder descritivo do modelo teórico do pensamento visual-espacial, faço ressaltar que foram exibidos nos dados processos mentais conjecturados que tinham sido associados a cada um dos quatro modos de pensamento visual-espacial, e foram observados nos dados dois outros processos mentais associados aos modos PVP e PVR, para além dos supostos. Foi observada no modo PVP da Felisberta uma *metáfora conceptual* “palavras cruzadas”, que não tinha sido conjecturada, e que a ajudou a gerar conceitos. Na

análise do modo PVR do Abel, também o processo de *metacognição* me foi revelado. Metacognição compreendida como regulação da cognição e aqui fundamentalmente avaliação contínua durante a resolução do problema em mãos. Finalmente quero dizer que com compreender o pensamento visual-espacial dum aluno através do modelo de pensamento visual-espacial, significa identificar os modos de pensamento visual-espacial que o aluno está a viver, reconhecer os processo mentais que lhes estão associados, conhecer portanto a singularidade do pensamento visual-espacial do aluno, naquele momento relativamente à exigência da tarefa que lhe foi atribuída.

O segundo critério de avaliação definido por Schoenfeld tem a ver com “o poder interpretativo”, que designa o grau de explicação fornecido sobre como e porquê as coisas trabalham. Julgo que no capítulo IV deste estudo foi razoavelmente determinado: o que os modos de pensamento visual-espacial do modelo inicial são, quais os processos de pensamento que estão associados a esses modos, como os modos de pensamento visual-espacial se relacionam, a descrição dos “constructos” (imagética e capacidades espaciais) essenciais ao pensamento visual-espacial. Isso tornou possível, no decorrer da análise dos dados, muitas vezes saber *como e porquê* as coisas aconteceram.

“Campo de acção” é o terceiro critério de avaliação definido por Schoenfeld, denota a gama de fenómenos “abrangidos” pelo modelo ou seja o âmbito do modelo. O pensamento visual-espacial foi tratado ao nível da educação em geometria ou melhor, explorado no contexto das isometrias em alunos no início da escolaridade.

O quarto critério de avaliação definido por Schoenfeld é “o poder preditivo” que está relacionado com formas de restrições ou afirmações do que é possível ou impossível com o modelo de pensamento visual-espacial. Apresento então quatro predições referentes ao modelo de pensamento visual-espacial proposto:

- “Há tendência para uma maior utilização do modo PVP quando surge algum obstáculo, qualquer indecisão por parte do aluno, ou ausência de familiaridade com o domínio de conhecimento”.
- “No modo de pensamento PVMM, os alunos usam imagens cinestésicas que são representadas por gestos icónicos. As imagens cinestésicas são usadas quando os alunos vivem o modo PVMM e desconhecem ou não dominam o vocabulário do contexto geométrico com que estão a trabalhar, ou quando têm dificuldades em coordenar diferentes estruturas de referência em relações às posições espaciais, que possam a vir a ser definidas e em relação aos objectos abstractos que estão a ser considerados”.

– “O modo PVE pode então obscurecer ou apagar a dinâmica mental do aluno, contribuindo então para o insucesso da execução da tarefa geométrica se certas competências faltarem aos alunos”.

– “Os modos de pensamento visual-espacial, usados por um aluno, dependem da tarefa, das orientações/restrições dadas para a execução dessa mesma tarefa, ferramentas utilizadas e interações sociais”.

“Rigor e especificidade” fazem parte do quinto critério de Schoenfeld estão ligados com a construção do modelo teórico e pretendem de saber quão bem estão definidos os objectos do modelo e as relações entre eles. Parece poder dizer-se que o modelo teórico, com os seus modos de pensamento visual-espacial e respectivos processos mentais que lhes estão associados, está suficientemente definido de forma a poder ser usado por outros, ser então testado e examinado no tipo de predições que o modelo apoia.

O sexto critério de avaliação definido por Schoenfeld é a “falsificabilidade” que está ligada à necessidade de construir afirmações não tautológicas ou predições sobre o modelo cuja veracidade possa ser empiricamente testada. O modelo é feito de proposições todas elas falsificáveis.

“Replicabilidade, generalidade e credibilidade” são itens do sétimo critério de Schoenfeld e estão profundamente relacionados com os critérios de rigor e especificidade já falados. A possibilidade de aplicar um modelo teórico nas condições em que foi usado por um autor depende de quanto o trabalho original foi suficientemente bem definido por forma que outros investigadores seguindo as pegadas do autor possam empregar métodos ou perspectivas muito próximas das originais. Dada a variabilidade de pessoas e contextos a noção estrita de replicabilidade é raramente apropriada em pesquisa educacional. Uma fonte de credibilidade é “múltiplos olhos para os mesmos dados” (Schoenfeld, 2002). O modelo teórico de pensamento visual-espacial proposto, em apresentações de análise dos dados empíricos do estudo, foi sujeito várias vezes a olhares e reflexões de professores e investigadores em seminários. Também usando o método de comparação constante, por exaustão parece que esgotei os dados do estudo. Tem ainda que ser testado.

O último critério de avaliação sugerido por Schoenfeld é “múltiplas linhas de prova, triângulação” que consiste em procurar muitas fontes de informação sobre o fenómeno em questão e ver se elas descrevem tanto quanto possível uma “mensagem” consistente. Neste estudo, procurou-se ter duas linhas de prova ao inserir no estudo alunos do 4º ano do primeiro ciclo do ensino básico, pertencentes a duas turmas as quais foram sujeitas cada uma a um ambiente de ensino que dava ênfase à exploração informal das transformações geométricas. Aos alunos de uma turma foram atribuídas tarefas mistas, no sentido de que envolviam, na

sala de aula, actividades com computador (micromundo Tarta, especialmente concebido para o estudo) e actividades com material manipulável não tecnológico. Aos outros alunos da outra turma foram atribuídas tarefas na sala de aula que envolviam só actividades com material manipulável não tecnológico. Mas serão necessárias mais fontes de prova no sentido de julgar o modelo de pensamento visual-espacial proposto.

7.3. O raciocínio geométrico dos alunos

O raciocínio geométrico dos alunos relativamente a movimentos, ocorrido antes do ambiente de ensino, estava fundamentalmente restrito ao uso informal dos respectivos termos ou ao uso correcto mas sem especificação das características dos movimentos. Poder-se-á dizer que a maior parte dos alunos mostravam estar em transição, do nível do “pré-reconhecimento” para o nível “visual” do desenvolvimento geométrico para movimentos elementares, na classificação desenvolvida por Clements e Battista.

Após o ambiente de ensino, os alunos evidenciam um raciocínio de maior complexidade, os movimentos passaram a ser descritos já pensando neles em termos das suas propriedades. Contudo a maior parte das vezes os alunos, ou não especificavam todos os parâmetros, cometiam algum erro na especificação, ou usavam imagens cinestésicas para especificar aqueles parâmetros porque ainda não dominavam o vocabulário referente aos movimentos ou às relações espaciais envolvidas. Aparentemente os alunos atingiram o nível “visual” de desenvolvimento geométrico para os movimentos deslizar, virar e rodar (excepto a aluna Ester para o movimento rodar). Foram mais longe os alunos Abel, Felisberta e Bárbara que aparentam estar em transição do nível visual para o nível descritivo/analítico, os dois primeiros alunos relativamente ao movimento virar e o último relativamente ao movimento rodar.

Parece talvez poder desenhar-se certa concordância entre os níveis de Van Hiele para movimentos e os modos de pensamento geométrico do modelo teórico de pensamento visual-espacial aperfeiçoado. O aluno Abel, cujo pensamento geométrico mostrou uma certa complexidade (pois no seu nível visual a sua codificação é alta para todos os movimentos e mesmo relativamente ao movimento virar ele mostra estar em transição do nível visual para o nível descritivo/analítico), foi o único aluno do estudo que usou de forma clara, uma vez, o modo de pensar visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens. Afigura-se-me que o modelo final de pensamento visual-espacial poderá talvez ajudar a entender os processos cognitivos que integram o nível 1 (“visual”) dos níveis de Van Hiele ou melhor tem que se estudar essa relação.

Pensemos então nos dois primeiros níveis de Van Hiele (o nível visual e o nível descritivo/analítico) que são aqueles que porventura poderiam envolver os alunos deste estudo. Vamos considerar que o movimento através dos níveis de Van Hiele é contínuo (Gutiérrez, Jaime e Fortuny, 1991; Matos, 1999), onde continuidade quer significar aqui que a aquisição dum nível específico se não dá instantaneamente ou muito rapidamente mas antes pode levar vários meses ou mesmo anos. Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) dizem que é possível identificar várias formas distintas de raciocinar durante a aquisição de um nível de Van Hiele. Matos (1999) num seu estudo, identificou modelos cognitivos para o conceito de ângulo, categorizando para o nível 1 (visual) de Van Hiele os modelos nível-básico, esquemas e metáforas e para o nível 2 (descritivo/analítico) os modelos proposicionais os quais especificam elementos, as suas propriedades e relações existentes entre eles.

O Quadro 7.2 pretende relacionar os níveis de Van Hiele com os modos de pensamento visual-espacial do modelo teórico aperfeiçoado deste estudo, e ajudar a explicar algumas actividades matemáticas detectadas, conjecturas apenas subjectivas. O nível 1 - visual de Van Hiele parece envolver dois modos de pensamento, o modo PVP e o modo PVMM do meu modelo teórico. O aluno pode movimentar-se de um destes modo para o outro, podendo talvez considerar-se o modo PVMM como um nível de transição ou de separação entre uma cognição corpórea, muitas vezes metafórica, e uma cognição estruturada e relacional. Muitas vezes no modo PVMM a terminologia usada pelo aluno ainda não é adequada ao domínio do conteúdo em que está a trabalhar ou tem dificuldade em coordenar os diferentes sistemas de referência e recorre então a gestos.

Quadro 7.2. Níveis de Van Hiele e modos de pensamento visual-espacial.

Níveis de Van Hiele	Modos de pensamento visual-espacial	
Nível 1 – visual	PVP	Imagens concretas, imagens de memória, metáforas conceptuais. Descrição factual da dinâmica mental (PVE).
	PVMM	Imagens cinestésicas (gestos), esquemas imagéticos, metáforas do movimento (PVE).
Nível 2 – descritivo/analítico	PVMM e PVR	Descrição analítica da dinâmica mental, metáforas (PVE).

O nível descritivo/analítico de descritivo/analítico do raciocínio geométrico subentende um pensamento visual-espacial que dá ênfase à exteriorização do pensamento por meio da

identificação das propriedades geométricas da figura em vez da identificação da figura como um todo. O modo PVE é o condutor dos modos PVP, PVMM e PVR do aluno. Na coluna da direita do Quadro 7.2, descreve-se o modo PVE nas suas várias formas de exteriorização os diferentes modos de pensamento e isso parece ir ao encontro da linguagem expressa no raciocínio geométrico dos dois primeiros níveis de Van Hiele. Para o nível 1, uma descrição factual da dinâmica mental podendo estar associada com imagens cinestésicas e metáforas. Para o nível 2 uma descrição analítica da dinâmica mental, metáforas. Todas estas relações que o quadro 7.2 pretende conjecturar entre os dois níveis de Van Hiele e os quatro modos de pensamento visual-espacial merecem ser examinadas em investigações futuras.

7.4. Recomendações

Deste trabalho decorrem dois tipos de recomendações. Um primeiro relacionado com a aplicação das suas conclusões ao processo de ensino da matemática, e um segundo tipo de recomendação que se relaciona com investigação futura.

7.3.1. Recomendações para o ensino

Os modos como os alunos usaram o seu pensamento visual-espacial sugerem algumas recomendações para as estratégias de ensino. Este estudo mostrou que, após o ambiente de ensino, os alunos, ao responderem às tarefas geométricas, substituíram frequentemente o seu pensamento visual-espacial resultante da percepção, por um modo de pensar resultante da manipulação mental de imagens, sustentado por imagens dinâmicas e antecipadoras, trampolim e sustentáculo de processos de pensamento de ordem mais elevada. Seria então importante que fosse fornecido aos alunos, desde muito cedo, um ensino influenciado por experiências em pensamento visual-espacial e que as crianças trabalhassem num ambiente catalizador de raciocínio mental complexo e de relações espaciais. Processos de pensamento como, por exemplo, a construção visual ligada à antecipação e organização lógica precisam de ser aprendidos e experimentados. Assim uma nova área de desafio, que precisa de ser pensada seriamente nas suas consequências educativas, é a que está relacionada com o tipo de ambientes de ensino que devem ser promovidos de forma a provocarem o uso pelos alunos de um pensamento visual-espacial de qualidade e então uma formação de professores e desenvolvimentos curriculares adequados.

Os professores deveriam prestar atenção especial ao modo de pensar visual-espacial dos seus alunos. Seria importante conseguir que o professor identifique o modo de pensamento

visual espacial que o aluno está a usar e julgar se é o adequado à tarefa que o mesmo aluno tem em mãos; se o aluno está a imitar acções ou a usar o seu próprio pensamento; que dificuldades sente na execução da tarefa. A este diagnóstico feito pelo professor seguir-se-á a sua mediação necessária e atenta. Intervir com uma sequência adequada de modos de pensamento visual-espacial, por exemplo a sequência pedagógica do tipo I. O professor deve decifrar os gestos dos alunos e interpretar por exemplo as imagens cinestésicas por estes gestos representadas ou negociar na aula o significado matemático de metáforas trazidas pelos seus alunos ou mesmo as representações restritivas dessas mesmas metáforas.

7.3.2. *Recomendações para a investigação*

Seria importante compreender o pensamento visual-espacial dos alunos à luz do modelo aperfeiçoado proposto, quando usam artefactos tecnológicos, nomeadamente versões actuais do Logo ou ambientes de Geometria Dinâmica tais como Cabri-Geometry, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor. As interacções dos alunos com o artefacto, as interacções entre alunos e a intervenção do professor poderiam ser analisadas bem como observado como essas mediações intervêm na vivência dos vários modos de pensamento visual-espacial e nos processos mentais associados. Deveriam ser examinadas ainda as predições que o modelo teórico final de pensamento visual-espacial apoia.

O termo *Geometria Dinâmica* entrou na literatura como um termo genérico devido à sua adequação à caracterização da característica que distingue este tipo de programas do outro: *arrastar*. Esta característica permite ao utilizador, depois de uma construção ser feita, mover livremente certos elementos de um desenho e observar os outros elementos a responder dinamicamente às condições alteradas (Goldenberg e Cuoco, 1998). Os ambientes sociais de aprendizagem que podem ser criados num ambiente Logo ou num ambiente de Geometria Dinâmica são essencialmente diferentes devido a diferentes objectos e acções disponíveis em cada ambiente e também a diferentes modos de interacção dentro de cada ambiente (Ballacheff e Sutherland citado em Olive, 2000).

Uma outra área de pesquisa teria a ver com os processos de pensamento que sustentam o pensamento visual-espacial envolvido nos níveis de Van Hiele para o desenvolvimento geométrico, a partir do nível “visual”. Por exemplo, examinar: em que medida o modelo teórico refinado de pensamento visual-espacial lhes é adequado; como é que a hierarquia dos níveis de Van Hiele se relaciona com o meu modelo de pensamento visual-espacial e qual o papel da linguagem na descrição e no fomentar da dinâmica mental.

Este estudo poderá ter contribuído para a compreensão do pensamento visual-espacial, através do modelo teórico elaborado onde foram identificados quatro modos de pensamento visual-espacial bem como os processos de pensamento que lhes estão associados. Estabeleceu-se uma relação entre os níveis de Van Hiele para movimentos manifestados pelos alunos e os modos de pensamento visual-espacial. Foi realçada a importância da existência de experiências precoces em pensamento visual-espacial bem como a influência da dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento. Os resultados deste estudo ilustram a complexidade referente à compreensão do pensamento visual-espacial. O estudo focou-se nas transformações geométricas abordadas no início da escolaridade, mas esta investigação tem implicações para a pesquisa e ensino em educação em geometria.

Referências

- Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. Londres: University of California Press.
- Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories. Em *ICME – 10, Plenary Sessions, DVD*. Dinamarca: Technical University of Denmark.
- Banchoff, T. e Schwartz, R. (1988). EDGE: The educational differential geometry environment. Em T. F. Banchoff e outros (Eds.), *Educational computing in mathematics* (pp. 11-29). North-Holland: Elsevier Science.
- Barwise, J. e Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 9-24). Washington: Mathematics Association of America.
- Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 47-60.
- Battista, M. T. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: a spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 86-94.
- Battista, M.T. (2003). Levels of sophistication in elementary students' reasoning about length. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME conference* (Vol. 2, pp. 73-80). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Bazzini, L. (2001). From grounding metaphors to technological devices: call for legitimacy in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 59-271.
- Bills, C. (2003). Metaphor in young children's mental calculation. *CERME 3*, Março Bellaria, Itália.
- Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education – a review. *Educational*

Studies in Mathematics, 11, 257-269.

- Bishop, A. (1983). Space and geometry. Em M. Landau e R. Lesh (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 75-203). Londres: Academic Press.
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-15.
- Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation*. Londres: Kluwer.
- Blake, R., Cepeda, N. e Hiris, E. (1997). Memory for visual motion. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 23(2), 353-369.
- Boero, P., Bazzini, L. e Garuti, R. (2001). Metaphors in teaching and learning mathematics: A case study concerning inequalities. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Holanda: Freudenthal Institut.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Brown, D. e Wheatley, G. (1990). The role of imagery in mathematical reasoning. Em G. Booker, P. Cobb e T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 217). México: Sección de Matemática Educativa del Cinvestav.
- Brown, D. e Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in a mathematical reasoning. Em I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu e F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-144). Ibaraki, Japão: University of Tsukuba.
- Burton, L. (1999). Why is intuition so important to mathematicians but missing from mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 27-32.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquires: learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Calado, I. (1994). *A utilização educativa das imagens*. Porto: Porto Editora.
- Caldas, A. (2004). Como se adapta o cérebro ao conhecimento da ortografia. Artigo apresentado no ciclo de colóquios *Despertar para a Ciência* Coimbra, Portugal.
- Campbell, K., Collis, K. e Watson, J. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 177-194.
- Carter, H. (1986). Linking estimation to psychological variables in the early years. Em H. Schoen e M. Zweg (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 74-81). Reston: NCTM.

- C. E. C. Summer University: Nits and primary School. (1987). Liège, Bélgica.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.
- Clausen-May, T. e Smith, P. (Eds.). (1998). *Spatial ability: A handbook for teachers*. Berkshire, Inglaterra: National Foundation for Educational Research.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Nov., pp. 2-9.
- Clements, D. e Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. Em Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Nova Iorque: Macmillan.
- Clements, D., Russel, S., Tierney, C., Battista, M. e Meredith, J. (1995). *Flips, turns and area*. Nova Iorque: Dale Seymour.
- Clements, D. e Sarama, J. (1997). Children's mathematical reasoning with the Turtle programming metaphor. Em Lyn D. English (Ed.), *Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images* (pp. 313-337). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P., Yackel, E. e Wood, T. (1992). A construtivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2-33.
- Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 362-385.
- Costa, C. (1985). *A model for software evaluation*. Tese de mestrado. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.
- Costa, C. (1992). O ensino da Geometria na escola elementar. *Revista da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Nov. 92 (pp. 70-74) e Março 93 (pp. 79-83).
- Costa, C., Correia, S. e Mendes, T. (1997). Micromundo Tarta. 2º *Simpósio de Investigação e Desenvolvimento de Software Educativo*. Coimbra: FCTUC.
- Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Washington: Mathematics Association of America.
- Dahl, B. (2004). Analysing cognitive learning processes through group interviews of successful high school pupils: development and a use of a model. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 129-155.
- Damásio, A. (1994). *Erro de Descartes*. Sintra: Publicações Europa-América.
- Damásio, A. (2000). *O sentimento de si*. Sintra: Publicações Europa-América.

- Damásio, A. (2003). *Ao encontro de Espinosa*. Sintra: Publicações Europa-América.
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 126-135). Reston: NCTM.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, Fev., 14-20.
- Dienes, Z. e Golding, E. (1967). *Geometria euclidiana*. Barcelona: Editorial Teide.
- Dörfler, W. (1989). Protocols of actions as a cognitive tool for a cognitive tool for knowledge construction. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 212-219). Paris: G.R. Didactique CNRS–Paris V.
- Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. Em F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-32). Assisi, Itália: University of Genova.
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. Em P. Nesher e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer.
- Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. Em R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 3-17). Nova Iorque: Springer.
- Dreyfus, T. e Gray, E. (2002). Research Forum 1 – Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. Em A. D. Cockburn e E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol. 1, pp. 113-138). Norwick, Inglaterra: School of Education and Professional Development University of East Anglia.
- Droujkova, M. (2003). The role of metaphors in the development of multiplicative reasoning of a young child. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol. 1, pp. 213). Hawai: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Cambridge, Inglaterra: Kluwer.
- Dutke, S. e Reimer, T. (2000). Evaluation of two types of online help for application software. *Journal of Computer Assisted Learning*, 16, 294-306.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. Em C. Mammana e

- V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Londres: Kluwer.
- Einsenberg, T. e Dreyfus, T. (1991). Spatial visualization in the mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 1-5.
- Edwards, L. (1991). Children's learning in a computer microworld for transformation geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 122-137.
- Edwards, L. (2002). The nature of mathematics: a personal journey. Em A. D. Cockburn e E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol. 1, pp. 149-153). Norwick, Inglaterra: School of Education and Professional Development University of East Anglia.
- Edwards, L., Frant, J. e Campbell, S. (2003). Embodiment in mathematics: metaphor and gesture. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol 1, pp. 173). Hawai: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Edwards, L. (2003). A natural history of mathematical gesture. *CERME 3*, Março, Bellaria, Itália.
- Emmorey, K., Kosslyn, S. e Bellugi, U. (1993). Visual imagery and visual-spatial language: Enhanced imagery abilities in deaf and hearing ASL signers. *Cognition*, 46, 139-181.
- Eves, H. (1995). *College geometry*. Boston: Jones and Bartlett Publishers.
- Eysenck, E. e Keane, M. (2001). *Cognitive psychology a student's handbook*. Canadá: Psychology Press.
- Ferrara, F. (2003a). Bridging perception and theory: what role can metaphors and imagery play? *CERME 3*, Março, Bellaria, Itália.
- Ferrara, F. (2003b). Metaphors as vehicles of knowledge: an exploratory analysis. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME conference* (Vol. 2, pp. 373-379). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Finke, R. (1989). *Principles of mental imagery*. Massachussetts: The MIT Press.
- Fischebein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.
- Flowers, J. e Garbin, C. (1989). Creativity and perception. Em J. Glover, R. Ronning e C. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 147-161). Nova Iorque: Plenum Press.
- Gal, H. e Linchevski, L. (2002). Analysing geometry problematic learning situations

by theory of perception. Em A. D. Cockburn e E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol 2, pp. 400-407). Norwick, Inglaterra: School of Education and Professional Development University of East Anglia.

Galton, M. e Williamson, J. (1992). *Group work in the primary classroom*. Londres: Routledge.

Garber, P. e Goldin-Meadow, S. (2002). Gesture offers insight into problem-solving in adults and children. *Cognitive Science*, 26, 817-831.

Gholam, G. K. (1998). Geometry in Egypt. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 248-252). Londres: Kluwer.

Goetz, J. e LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Londres: Academic Press.

Goldenberg, P. (1991). Seeing beauty in mathematics: using fractal geometry to build a spirit of mathematical inquiry. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 39-66). Washington: Mathematics Association of America.

Goldenberg, P. e Cuoco, A. (1998). What is a dynamic geometry? Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 351-368). Londres: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, P., Cuoco, A. e Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Londres: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. (1993). The IGPME working group on representations Em I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu e F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 96). Ibaraki, Japão: University of Tsukuba.

Goldin, G. e Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. Em L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin e B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. e Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. Em Cuoco, A. A. e Curcio, F. R. (Eds.), *The Roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, Virgínia: NCTM.

Goldin-Meadow, S., Kim, S. e Singer, M. (1999). What the teachers's hands tell the student's mind about math. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 720-730.

Goldin-Meadow, S. (2000). Beyond words: the importance of gesture to researchers

- and learners. *Child Development*, 71(1), 231-239.
- Gordo, F. (1993). *A visualização espacial e a aprendizagem da matemática. Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: APM.
- Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: the influence of gender on the solution process of rotations problems. Em L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 19-26). Valência, Espanha: Universidade de Valência.
- Gray, E. e Tall, D. (1994). Ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 115-141.
- Gray, E. e Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on cognition development in elementary arithmetic. Em O. Zalavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME Conference* (Vol. 3, pp. 49-56). Haifa, Israel: Institut of Tecnology, Department of Education in Technology and Science.
- Gray, E. e Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. Em A. D. Cockburn e E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol. 1, pp 115-120). Norwick, Inglaterra: School of Education and Professional Development University of East Anglia.
- Gruber, H. e Vonèche, J. (1977). *The essencial Piaget*. Londres: Routledge & Kegan Paul.
- Guay, R. e McDaniel, E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 211-215.
- Gusev, V. e Safuanov, I. (2003). Thinking in images and its role in learning mathematics. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol 4, pp. 87-94). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. e Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237-251.
- Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la pizarra*. Madrid: Ediciones Piramides.
- Hazzan, O. e Zazkis, R. (2003). Reducing abstraction: the case of elementary mathematics. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol. 3, pp. 39-45). Honolulu, USA: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Heddens, J. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *Arithmetic Teacher*, 2, 14-17.

- Hegarty, M. e Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684-689.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. e Dormolen, J. (1996). Space and shape. Em A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde, *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry . Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 29-37). Londres: Kluwer.
- Houtz, J. e Patricola, C. (1999). Imagery. Em M. A. Runco e S. R. Priyzer (Eds.), *Encyclopedia of creativity*. (Vol. 2, pp. 1-11). Londres: Academic Press.
- Iannece, D. e Tortora, R. (2003). The evolution of graphic representations in a Vygotskijan perspective. *CERME 3*, Março, Bellaria, Itália.
- ICMI Study (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 337-345). Londres: Kluwer.
- Issing, L. J. (1990). Learning from pictorial analogies. *European Journal of Psychology of Education*, 5 (4), 489-499.
- Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination and reason*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Johnson-Gentile, K. (1990). *The effects of computer and non-computer environments on fifth and sixth-grade students' conceptualizations of geometric motions*, Tese de doutoramento não publicada, University of New York at Buffalo, EUA.
- Jonhson-Gentile, K. e Outros (1994). Effects of computer and noncomputer environments on students' conceptualizations of geometric motions. *Journal Educational Computing Research*, 11(2), 121-140.
- Johnson, V. (1987). The evaluation of microcomputers programs: an area of debate. *Journal of Computer Assisted Learning*, 3, 40-50.
- Jones, K. (1998). Visualization, imagery and the development of geometrical reasoning. (*Geometry Working Group, Report based on the meeting at the University of Birmingham*).
- Kadunz, G. e StraBer, R. (2004). Image-metaphor-diagram: visualisation in learning mathematics. Em M. J. Hoines e A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME Conference* (Vol. 4, pp. 241-248). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Kidder, E. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 40-52.

- Kosslyn, S. (1980). *Image and mind*. Cambridge, EUA: Harvard, University Press.
- Kroner, L. (1994). *Slides, flips and turns*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based environment. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 113-121). Londres: Kluwer.
- Lakoff, G. e Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff, G. e Núñez, R. (1997). The metaphoric structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. Em Lyn D. English (Ed.), *Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images* (pp. 21-89). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Lakoff, G. e Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh*. Nova Iorque: Basic Books.
- Lakoff, G. e Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. Nova Iorque: Basic Books.
- Latner, L. e Hadar, N. (1999). Storing a 3D image in the working memory. Em O. Zalavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME conference* (Vol. 3, pp. 201-208). Haifa, Israel: Institut of Tecnology, Department of Education in Tecnology and Science.
- Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. Em G. Booker, P. Cobb e T. N. Mandicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 259-266). Morelos, México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.
- Leron, U. (2004). Mathematical thinking & human nature: consonance & conflict. Em M. J. Hoines e A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME conference* (Vol. 3, pp. 217-224). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Lesh, R. (1976). Transformation geometry in elementary school: some research issues. Em J. Larry Martin e David Bradbard (Eds.), *Space and geometry* (185-243). Athens, EUA: Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics and University of Georgia.
- Lewellen, H. (1992). *Conceptualizations of geometric motions in elementary school children: an extension of the Van Hiele model*. Tese de doutoramento não publicada, University of New York at Buffalo, EUA.
- Mammana, C. E Villani, V. (1998). Geometry and geometry-teaching through the ages. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 1-4). Londres: Kluwer.

- Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue, *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 258-265). Paris, França: G. R. Didactique CNRS – Paris V.
- Mariotti, A. e Pesci, A. (1992). Visualization in problem solving and learning. Em W. Geeslin e K. Graham (Eds.) *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 22). Durham, EUA: University of New Hampshire.
- Mariotti, A. (1994). The dialectical process between figures and definition in social interaction in the classroom. Em Luciana Bazzini e Hans-Georg Steiner (Eds.), *Proceedings of the Second Bilateral Italian-German Symposium on Didactics of Mathematics*. Bielefeld, Alemanha: Universitat Bielefeld.
- Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. Em R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-16). Nova Iorque: Springer.
- Mariotti, A. e Cerulli, M. (2001). Semiotic mediation for algebra teaching and learning. Em M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 143-350). Utrecht, Holanda: Freudental Institute.
- Mariotti, A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. Em L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695-723). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Marmor, G. e Zaback, L. (1976). Mental rotation by the blind: does mental rotation depend on visual imagery? *Journal of experimental psychology: human perception and performance*, 2(4), 515-521.
- Matos, J. M. e Gordo, F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação em Matemática*, 26, 13-17.
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.
- Mc Leay, H., O'Driscoll-Tole, K. e Jones, K. (1998). Using imagery to solve spatial problems. (*The Geometry Working Group*, Ocasional paper of BSRLM).
- Meissner, H. e Pinkernell (2000). Spatial abilities in primary schools. Em T. Nakahara e M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 287-294). Hiroshima, Japão: University of Hiroshima.

- Mi-Kyung, J., Jung-Sook, P., Oh-Nam, K., Kyung-Hee, S. e Kyoung-Hee, C. (2003). Gesture in the context of mathematical argumentation. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol 1, pp. 296). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Millar, S. (1976). Spatial representation by blind and sighted children. *Journal of experimental child psychology*, 21, 460-479.
- Ministério da Educação. (1990). *Reforma educativa e ensino básico, programa do 1º ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.
- Ministério da Educação. (2004). *Organização curricular e programas ensino Básico*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- Mira Math Activities for Elementary School (1973). Ontário: A Mira Math CO.
- Mitchelmore, M. (1976). Cross-cultural research on concepts of space and geometry. Em J. L. Martin (Ed.), *Space and geometry* (pp. 143-185). Ohio: Eric Center for Science Mathematics and Environmental Education.
- Mithen, S. (1996). *A pré-história da mente, uma busca das origens da arte, da religião e da ciência*. Brasil: Editora UNESP.
- Morris, J. (1987). Investigating symmetry in the primary grades. Em Jane M. Hill (Ed.), *Geometry for grades K-6* (pp. 55-60). Reston, EUA: NCTM.
- Moschkovich, J. (2004). Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 49-80.
- Moyer, J. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, March, 83-92.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação Matemática*. Lisboa: APM/IE.
- NCTM (1995). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics, addenda series, grades K-6, geometry and spatial sense*. Reston: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Nemirovsky, R. e Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 99-131.
- Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol. 1, pp 105-109). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Neubrand, M. (1998). Tendencies in the changes on a german textbook. Em C. Mammana e

- V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 208-214). Londres: Kluwer.
- Noddings, N. (1990). Construtivism in mathematics education. Em NCTM (Eds.), *Constructivist view on the teaching and learning of mathematics*, monograh nº4- Journal for Research in Mathematics Education (pp. 7-18). Reston, EUA: NCTM.
- Noss, R., Healy, L. e Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203-233.
- Nunez, R., Edwards, L. e Matos, F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 45-65.
- Nunez, R. (2000). Mathematical idea analysis: what embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. Em T. Nakahara e M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-22). Hiroshima, Japão: University of Hiroshima.
- Nunez, R. (2004). RafaelNunez'home page. [Acesso electrónico]. Disponível: <http://www.unifr.ch/perso/nunezr>.
- Nunez, R. (em impressão). Do real numbers really move? Language, thought, and gesture: the embodied cognitive foundations of mathematics. Em F. Lida, R. Pfeifer, L. Steels e Y. Kunyoshi (Eds.), *Embodied artificial intelligence*. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Olive, J. (2002). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 7-33). Fundação: SPCE.
- Oliveira, M. (1993). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico*. São Paulo: Editora Scipione.
- Osta, I. (1998). Introduction. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 109-112). Londres: Kluwer.
- Owens, K. (1994). *Spatial problem solving in mid-primary school*. Manuscrito não publicado, University of Western em Sydney.
- Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. Em O. Zalavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME conference* (Vol. 1, pp. 220-234). Haifa: Israel Institut of Tecnology.
- Owens, K. (sem data). *When qualitative and quantitative analysis and complementary: an example on the use of visual imagery by primary school children*. Manuscrito não publicado, University of Western em Sydney.
- Pallascio, R., Talbot, L., Allaire, R. e Mongeau, P. (1989). L'incidence de l' environment

- sur la perception et la représentation d'objets géométriques. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue, *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 82-89). Paris, França: G. R. Didactique CNRS – Paris V.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms*. Nova Iorque: Basic Books.
- Pearman, D. (1990). Transformation geometry and young children. *Curriculum 11*(1), 16-26.
- Perner, J. e Astington, J. (1992). Em H. Beilin e P. Pufall (Eds.), *Piaget's theory: prospects and possibilities* (pp. 223-224). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Pesci, A. (1995). Visualization in mathematics and graphical mediators: an experience with 11-12 year old pupils. Em R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 33-51). Nova Iork: Springer.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Londres: Routledge and Paul.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1977). *A imagem mental na criança*. Porto: Livraria Civilização–Editora.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1979). *La psychologie de l'enfant*. França: Press Universitaires de France.
- Pitta-Pantazi, D., Gray, E. e Christou, C. (2004). Elementary school students' mental representations of fractions. Em M. J. Hoines e A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME Conference* (Vol. 4, pp. 41-48). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Ponte, J. (2003). O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa? Em Conselho Nacional de Educação (Ed.), *O ensino da matemática, situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Posner, M. e Raicle, M. (2001). *Imagens da mente*. Porto: Porto Editora.
- Presmeg, N. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics 17*, 297-311.
- Presmeg, N. (1986b). Visualization in high school. *For the Learning of Mathematics 6*(3), 42-46.
- Presmeg, N. (1989). Visualization in multicultural mathematics classroom. *Focus on learning problems in mathematics, 11*(1), 17-24.
- Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595 -610.
- Presmeg, N. e Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: an international study. Em L. Meira e D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for*

- the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58-65). Recife, Brasil: University of Pernambuco.
- Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. Em L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning analogies, metaphors and images* (pp. 299-313). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.
- Robutti, O. e Arzarello, F. (2003). Approaching algebra through motion experiences. Em N. A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th PME Conference* (Vol 1, pp. 111-115). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai.
- Roth, W. (2001). Gestures: Their role in teaching and learning. *Review of Educational Research*, 71(3), 365-392.
- Sabena, C. (2004). The role of the gestures in conceptualization: an exploratory study on the integral function. Em M. J. Hoines e A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME conference* (Vol. 4, pp. 145-152). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Sacks, O. (1985). *O homem que confundiu a mulher com o chapéu*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Sacks, O. (1996). *Um antropólogo em Marte*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Sanok, G. (1987). Living in a world of transformations. Em Jane M. Hill (Ed.), *Geometry for grades K-6*, (pp. 50-54). Reston, EUA: NCTM.
- Saxe, G. e Bermudez, T. (1996). Emergent mathematical environments in children's games. Em L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin e B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 51-68). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Schell, V. (1998). Introduction to the special issue: elements of geometry in the learning of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2, 3), 1-3.
- Schoenfeld, A. (2002). Research methods in (mathematics) education. Em L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-487). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Scrivener, S. (1995). Exploiting mental imaging: reflections of an artist on a mathematical excursion. Em R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 309-321). Nova Iorque: Springer.
- Sekiguchi, Y. (2000). A teaching experiment on mathematical proof: roles of metaphor and externalisation. Em T. Nakahara e M. Koyama (Eds.), *Proceedings of 24th PME Conference* (Vol. 4, pp. 129-136). Hiroshima: Hiroshima University.

- Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. Em J. Malkevitch (Ed.), *Geometry's future* (pp. 15-22). Lexington, EUA: COMAP.
- Sesay, M. (1993). *Dimensions of image*. Derby, Inglaterra: ATM.
- Sfard, A. (1997). Commentary: on metaphorical roots of conceptual growth. Em L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning analogies, metaphors and images* (pp. 339-371). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Sfard, A. (2002). Thinking in metaphors and metaphors for thinking. Em D. Tall e M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics* (pp. 79-96). Flaxton, Austrália: Post Pressed.
- Shah, A. (1969). Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven. *Arithmetic Teacher*, 16, 119-128.
- Shannon, P. (2002). Geometry: an urgent case for treatment. *Mathematics Teaching*, December, 26-29.
- Sierpinska, A. (2002). Reaction. Em A. D. Cockburn e E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol. 1, pp. 129-132). Norwick, Inglaterra: School of Education and Professional Development University of East Anglia.
- Sicklick, F., Turkel, S. e Curcio, F. (1988). The transformation game. *Arithmetic teacher*, 2, 37-41.
- Simon, M. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.
- Solano, A. e Presmeg, N. (1995). Visualization as a relation of images. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 66-73). Recife, Brasil: University of Pernambuco.
- Solomon, B., Powell, K., e Gardner, H. (1999). Multiple intelligences. Em Mark A. Runco e Steven R. Pritzker (Eds.), *Encyclopedia of creativity* (Vol. 2, pp. 273-283). Londres: Academic Press.
- Stacey, K., Helme, S. e Steinle, V. (2001). Confusion between decimals, fractions and negative numbers: a consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. Em M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 217-224). Utrecht, Holanda: Freudental Institute.
- Strauss, A. e Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Londres: Sage Publications.
- Tall, D. (1991a). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Cambridge, Inglaterra: Kluwer.

- Tall, D. (1991b). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). Washington: Mathematics Association of America.
- Tartre, L. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 216-229.
- Thompson, F. (1992). Geometric patterns for exponents. *The Mathematics Teacher*, Dez., 746-749.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, Flórida: Academic Press.
- Veloso, E. (1998). *Geometria, temas actuais: materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, E. e Ponte, J. (1999). Introdução. Em Departamento de Educação da Faculdade de Ciências (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milénio* (pp. 1-5). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
- Villani, V. (1998). The way ahead. Em C. Mammana e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 319-327). Londres: Kluwer.
- Vonèche, J. (2001). Mental imagery: From Inhelder's ideas to neuro-cognitive models. Em A. Tryphon e J. Vonèche (Eds.), *Working with Piaget: essays in honour of Barbel Inhelder* (123-128). East Sussex, Inglaterra: Psychology Press.
- Von Glaserfeld, E. (1995). *Radical construtivism: a way of knowing and learning*. Londres: The Falmer Press.
- Vuyk, R. (1981). *Overview and critique of Piaget's genetic epistemology 1965-1980*. Londres: Academic Press.
- Vygotsky L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard: Harvard Univ. Press.
- Vygotsky L. S. (1985). *Pensée et language*. Paris: Terrains.
- Warren, E. (2000). Visualization and the development of early understanding in algebra. Em T. Nakahara e M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 273-280). Hiroshima, Japão: University of Hiroshima.
- Wertheimer, M. (1938). Gestalt theory. Em W. D. (Ed.), *A source book of gestalt psychology* (pp. 1-11). Londres, Inglaterra: Routledge e Kegan Paul.
- Wheatley, G. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 10-11.

- Wheatley, G. (1992). Spatial sense and the construction of abstract units in tiling. *Arithmetic Teacher*, Abril, 43-45.
- Wheatley, G. e Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity: image as a metaphor. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 81). Lisboa, Portugal: Universidade de Lisboa.
- Wheatley, G. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. Em L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning analogies, metaphors and images* (pp. 281-298). Londres: Lawrence Erlbaum.
- Wheatley, G. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2 e 3), 65-77.
- Wheatley, G. e Reynolds, A. (1996). The construction of abstract units in geometric and numeric settings. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 67-83.
- Williford, M. (1972). A study of transformational instruction in the primary grades. *Journal for Research in Mathematics*, Nov., 260-271.
- Wilson, P. e Adams, V. (1992). A dynamic way to teach angle and angle measure. *Arithmetic Teacher*, January, 6-13.
- Yerushalmy, M., Shternberg, B. e Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. Em O. Zalavsky (Eds), *Proceedings of 23th PME Conference* (Vol 1, pp. 197-211). Haifa, Israel: Institut of Tecnology.
- Young, J. (1982). Improving spatial abilities with geometric activities. *Arithmetic Teacher*, Setembro, 38-43.
- Zazkis, R., Dubinsky, E. e Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: a study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.
- Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, EUA: Mathematics Association of America.
- Zimmermann, W. e Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, EUA: Mathematics Association of America.

Índice remissivo dos termos mais importantes

A

abstracção, 94, 99
abstracção empírica, 24
abstracção pseudo-empírica, 24
abstracção reflexiva, 24
analogias, 102
apropriação, 67
avaliar uma imagem, 93

B

Batimentos, 58

C

constância perceptual, 42
construção visual, 45, 92, 100
coordenação, 44, 99
coordenação visual motora, 41

D

descrição da dinâmica mental, 101
discriminação visual, 42
discurso egocêntrico, 65
discurso interior, 65

E

esquema imagético, 31, 32, 95
esquema imagético figurativo, 33
esquema imagético operativo, 33
esquema imagético relacional, 34
esquema imagético simbólico, 34
estruturação espacial, 44, 99

G

generalização construtiva, 99
geração de conceitos, 94
Gestos deiéticos, 58
Gestos icónicos, 58
Gestos metafóricos, 58

I

Imagem concreta, 91
imagem visual, 89
imagens antecipadoras, 30, 96
imagens antecipadoras cinéticas, 30
imagens antecipadoras de transformação, 30
imagens cinestésicas, 100
imagens de memória, 91
imagens reprodutoras, 30
Imagens reprodutoras, 96
imagens reprodutoras cinéticas, 30
imagens reprodutoras de transformação, 30
imagens reprodutoras estáticas, 30
imagética, 89
imagética cinestésica, 35
imagética concreta, 35
imagética de memória, 35
imagética dinâmica, 35, 94
imagética padrão, 35
Imagética padrão, 94
imitação, 66
inferência intuitiva, 92
internalização, 63
intuição, 17
intuições afirmativas, 19
intuições antecipatórias, 20, 97
intuições primárias, 20, 92
intuições secundárias, 97

M

Mediação, 63
mediação semiótica, 63
mediador semiótico, 151
memória visual, 42
metacognição, 132
metáfora conceptual, 46
metáfora do movimento fictício, 53

P

Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), 90
pensamento visual-espacial, 88, 89
Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE), 90
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens ou da construção mental de relações entre imagens (PVMM/PVR), 90
percepção, 90
percepção da figura fundo, 41
percepção da posição do espaço, 42
percepção das relações espaciais, 42
processamento de informação visual, 93

R

raciocínio transformativo, 95
reconhecimento do padrão visual, 93
representação, 100

T

tradução, 101
transformação mental, 98

U

unificação, 98

Z

zona de desenvolvimento proximal (ZDP), 66

ANEXOS

ANEXO A

Tarefas Geométricas

I (A)

. Dar aos alunos rectângulos 3cm * 4cm em papel de construção colorido.

. Discutir com os alunos as propriedades dos rectângulos.

Cada aluno pega numa régua e desenha uma das diagonais. O aluno corta o rectângulo ao meio ao longo da diagonal.

. Que podes dizer das duas peças que obtiveste? Que nome lhes dás? Porquê?

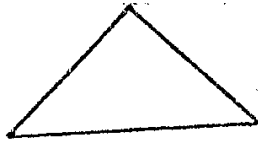
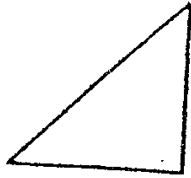
. Podes construir outras figuras diferentes do rectângulo, unindo os lados iguais de um e de outro triângulo? Como se chama a nova figura? Quantos lados tem? Quantos vértices? *(a cada aluno são dados tantos triângulos quantos os necessários, para ele poder construir as diversas soluções)*

I (B)

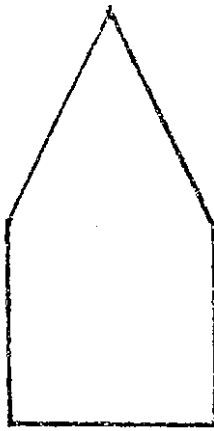
Usa estes quatro triângulos e constrói com todos eles uma nova figura. Pode ser por exemplo um triângulo maior ou uma figura com quatro lados. Quantos lados e quantos vértices tem a figura que construístes?

II

Com estas 4 peças



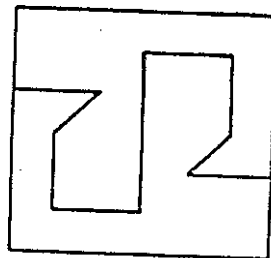
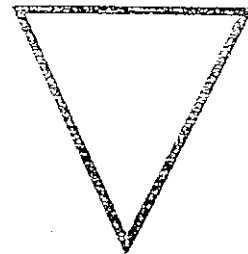
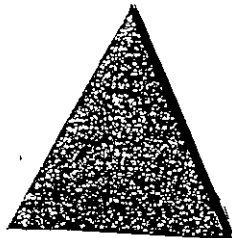
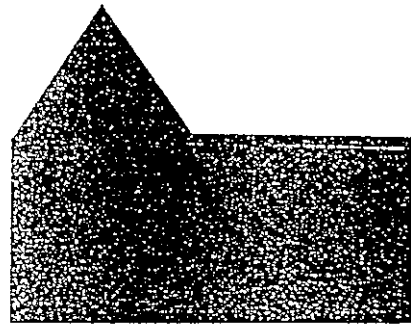
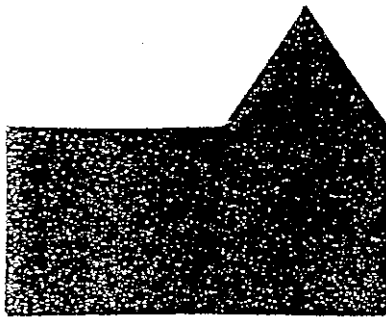
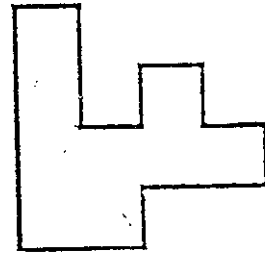
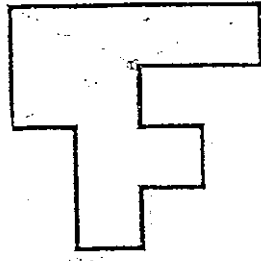
Podes construir a casa que a seguir te mostro?



Sim _____ Não _____

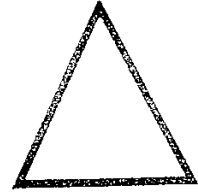
III

Nas figuras a seguir, há pares delas que têm a mesma forma e o mesmo tamanho. Quais são esses pares? Como me mostravas que tinhas razão?



IV (A)

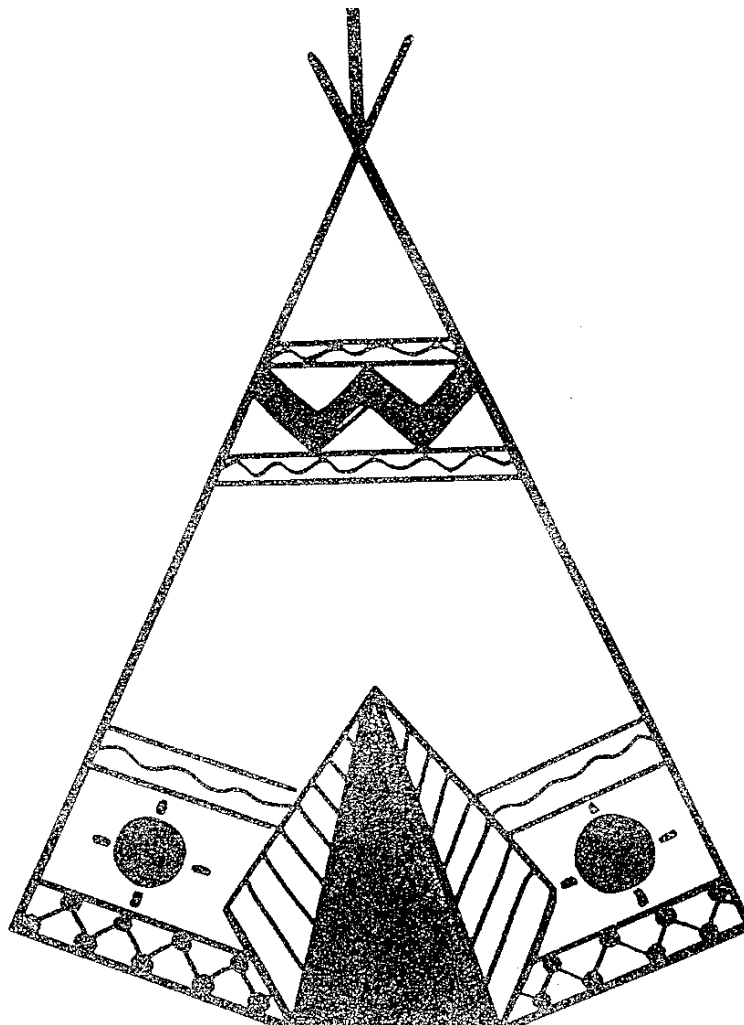
Mostrar ao aluno a seguinte forma



e fazer-lhes as seguintes perguntas:

Esta forma é parecida com uma pequena tenda, não é?

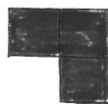
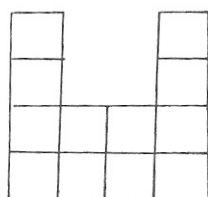
Uma tenda como esta, está escondida em qualquer parte da figura que a seguir te vou mostrar. O nosso jogo é encontrar a figura escondida. Mostra-me onde é que está a tenda nesta figura:



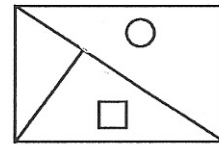
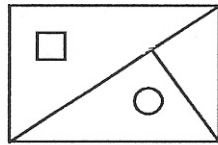
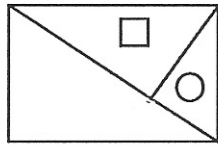
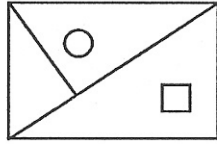
Esta figura com que se parece?

IV (B)

Esta figura maior que tu vês nesta folha pode ser coberta por várias figuras mais pequenas, com a forma das figuras a cores que estão desenhadas também na tua folha. Experimenta fazer essa cobertura.

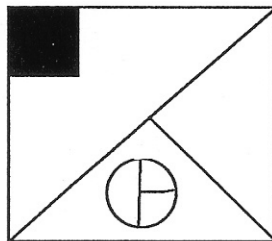


V

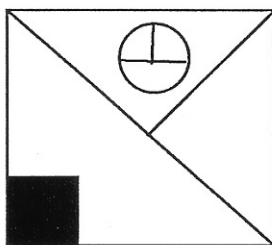


Qual destas três figuras rectangulares, dispostas horizontalmente na segunda linha desta folha, é a mesma que a figura rectangular que está na linha de cima? Porquê?

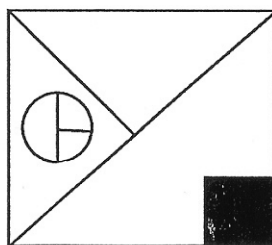
Se agora pensares da mesma maneira, qual destas três figuras (aponta para as figuras dispostas horizontalmente na última linha desta folha) se parecerá com a figura A?



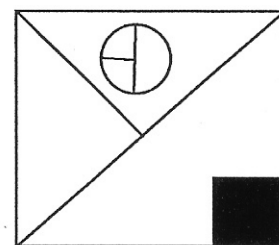
A



B



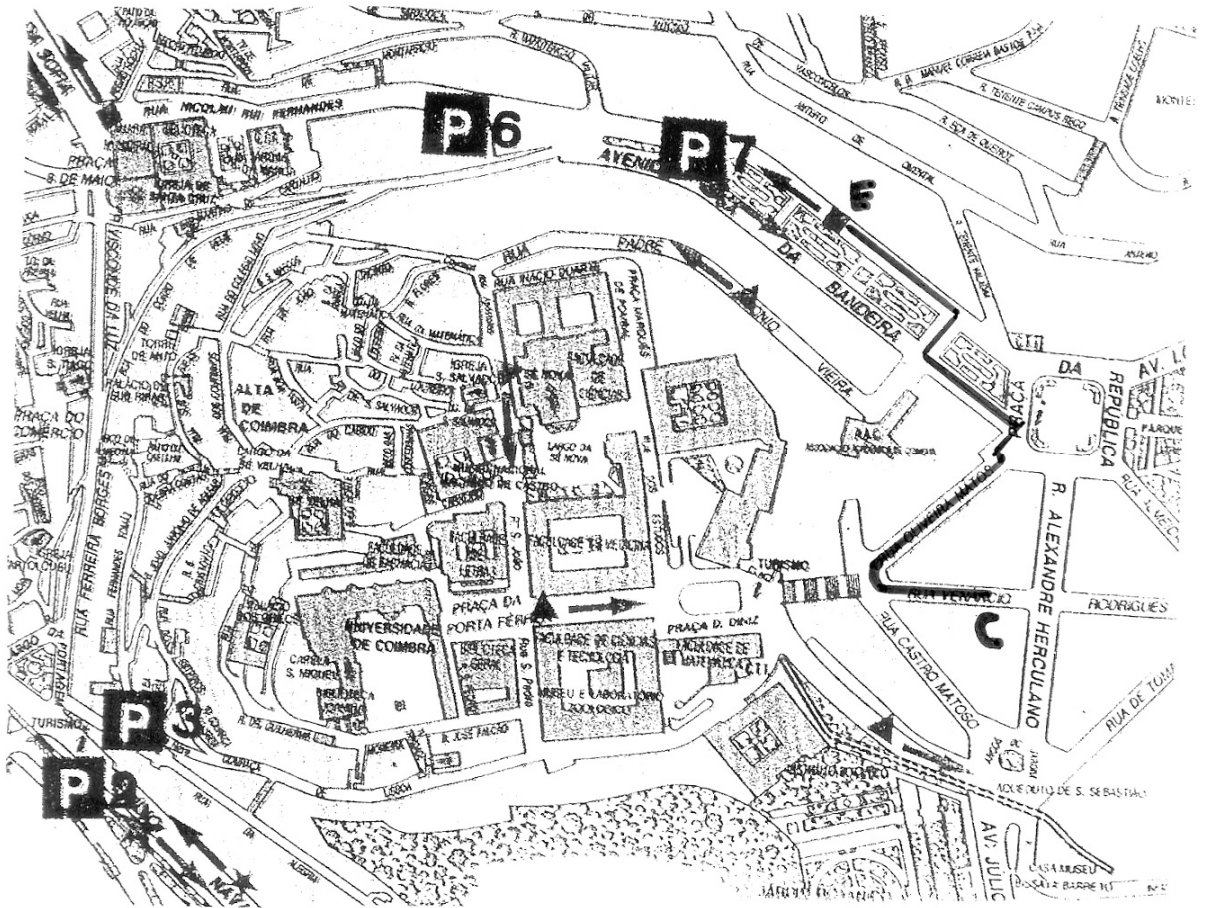
C



D

VI (A)

O que vês na figura abaixo, é um trajecto desenhado a verde que leva a Sara da casa (C) à escola (E).



Quantos ângulos rectos estão no trajecto da Sara?

Desenha a azul, no trajecto da Sara duas rectas perpendiculares.

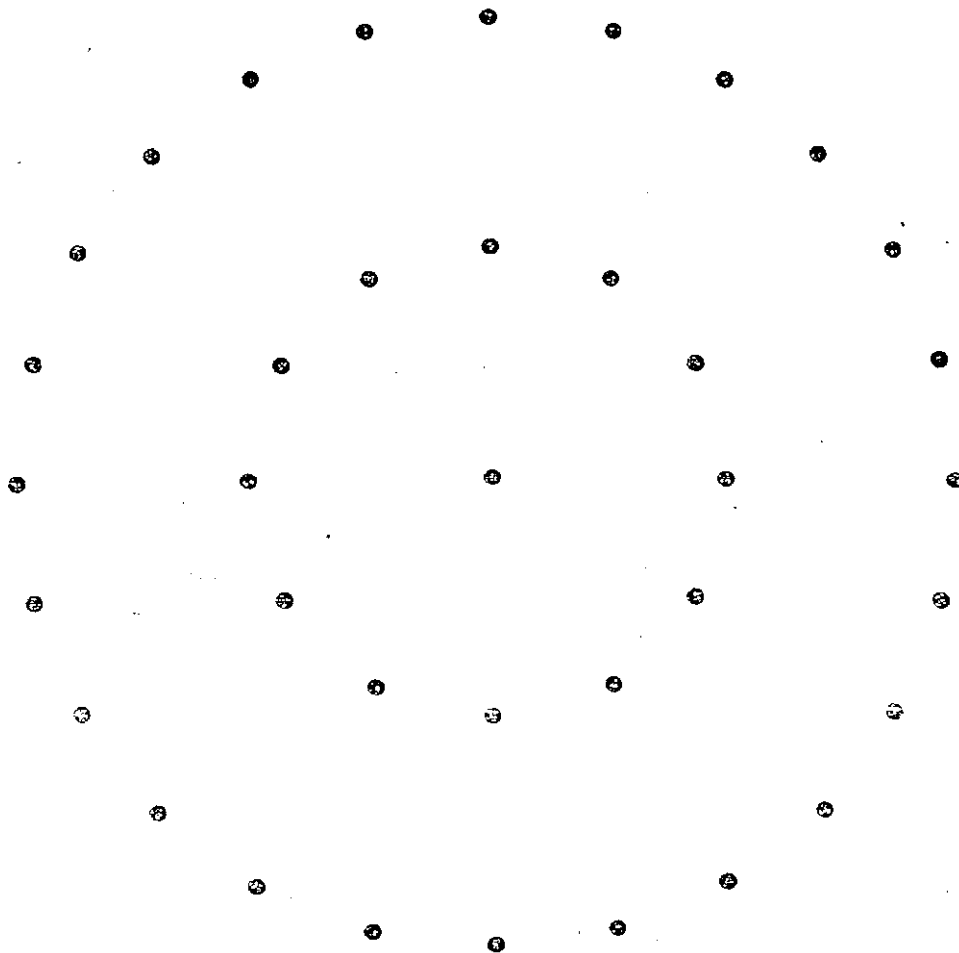
Desenha na figura, a vermelho, duas rectas paralelas.

Desenha outro trajecto diferente do que está assinalado a verde e que leve a Sara de casa até à escola.

VI (B)

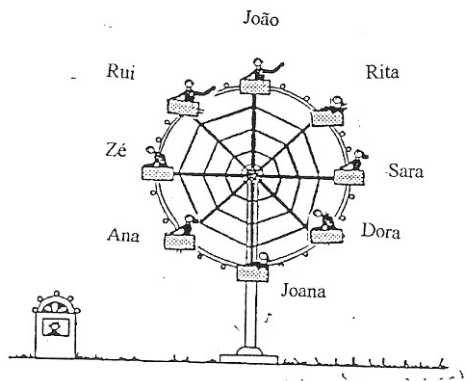
Desenha no geoplano circular, com marcadores de cores diferentes:

- Um ângulo recto
- Um outro ângulo cujo tamanho seja metade do ângulo recto.
- Ainda um outro ângulo cujo tamanho seja o dobro do ângulo recto.



VI (C)

O que vês é uma roda de feira com oito pessoas nela. Quem vai estar no ponto mais alto da roda, depois dela rodar um quarto de volta no sentido do movimento dos ponteiros do relógio?

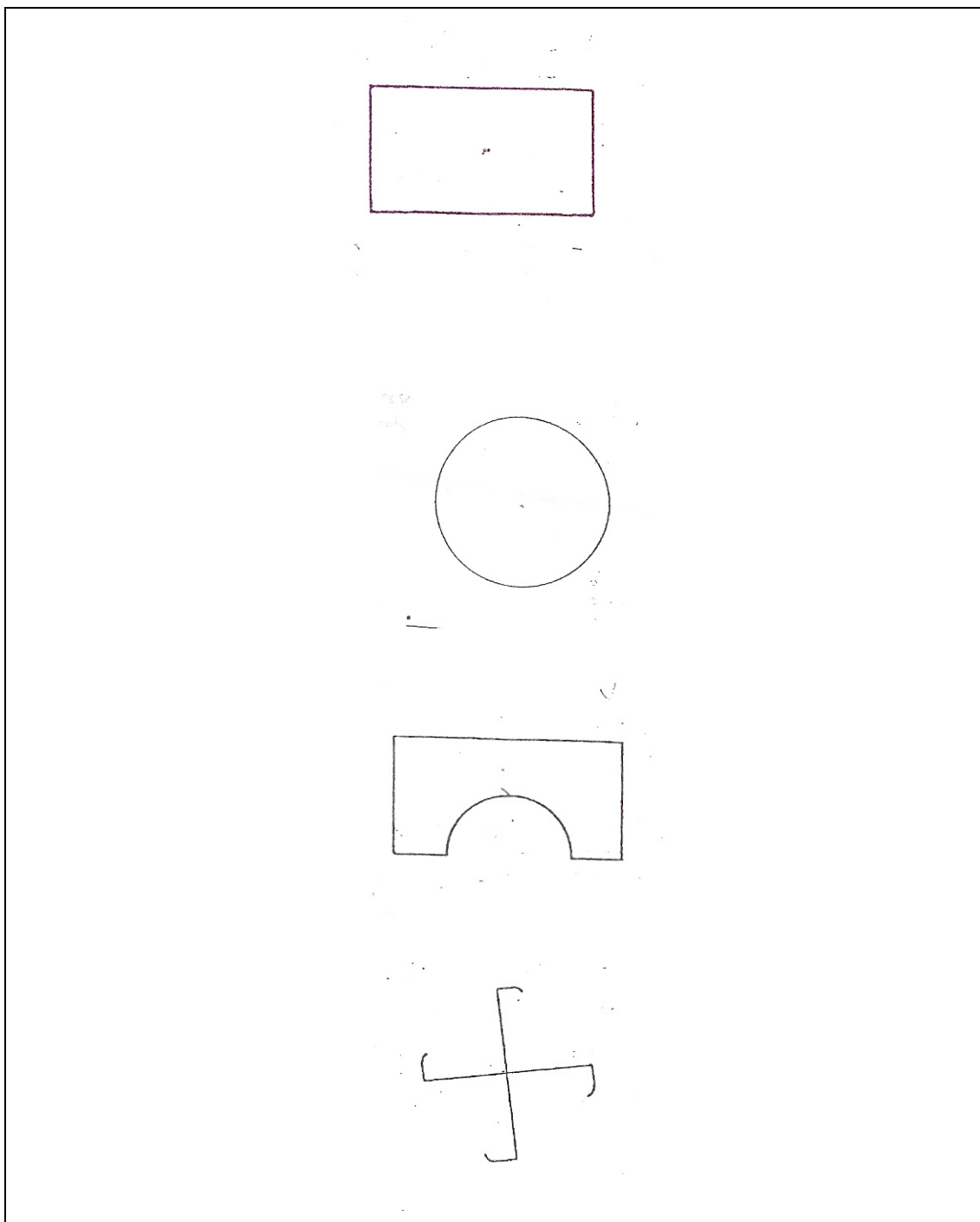


Assinala a azul, na figura acima, uma recta vertical.

Assinala a verde, na figura acima, uma recta horizontal.

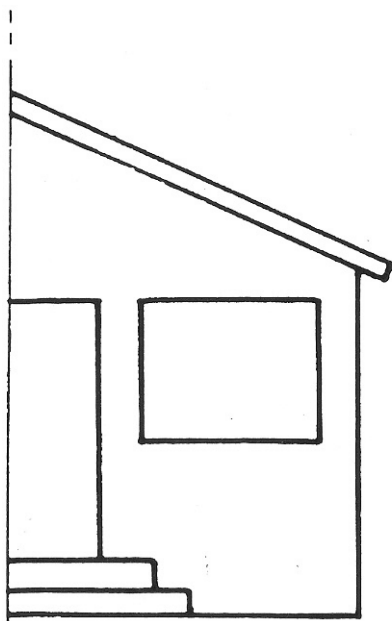
VII (A)

- Quais das figuras que te vou mostrar podem ser dobrados de forma que as suas partes coincidam? Podes fazer essas dobragens de mais que uma maneira?
- Quais destas figuras podem ser rodadas em torno do seu centro de um certo ângulo diferente de uma volta completa e parecem que não se mexeram?



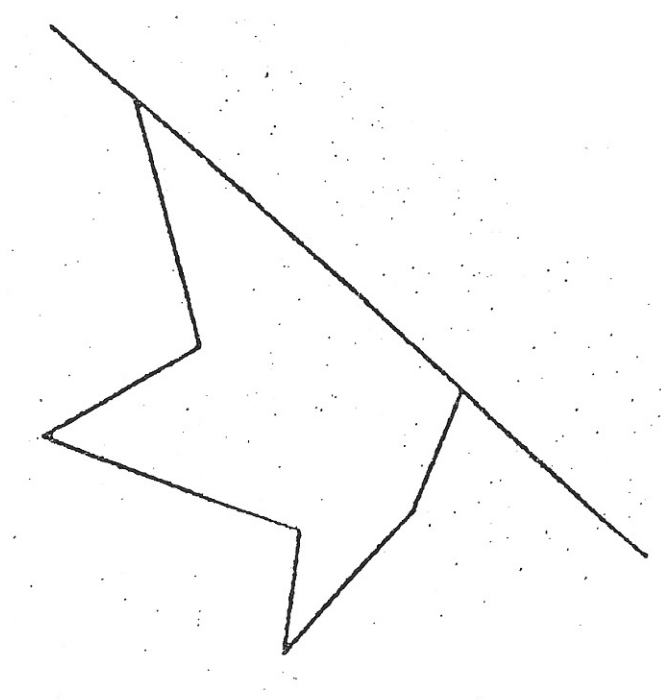
VII (B)

Completa o desenho seguinte de modo que ele tenha uma linha de simetria.



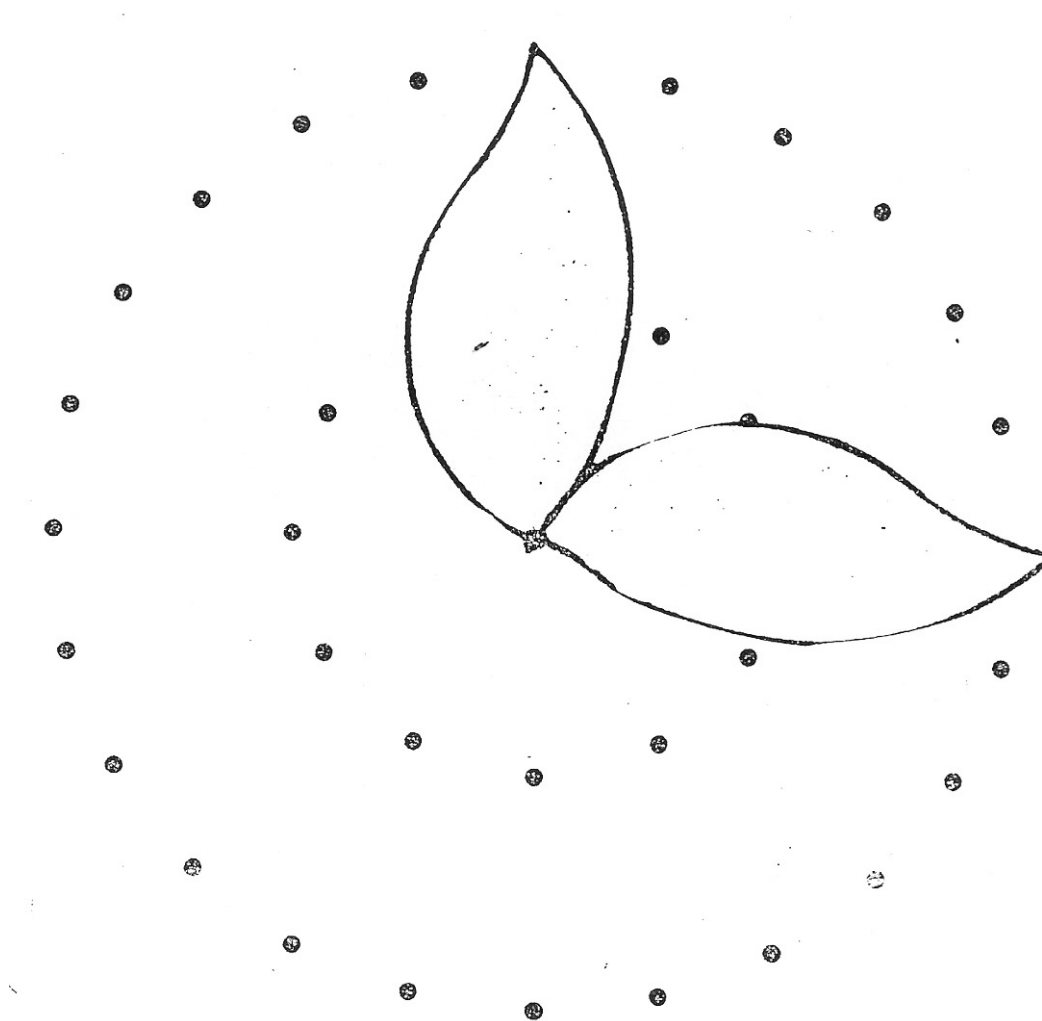
VII (C)

Supõe que colocas verticalmente um espelho em cima da recta da figura. Completa a figura imaginando a imagem da figura dada pelo espelho.



VII (D)

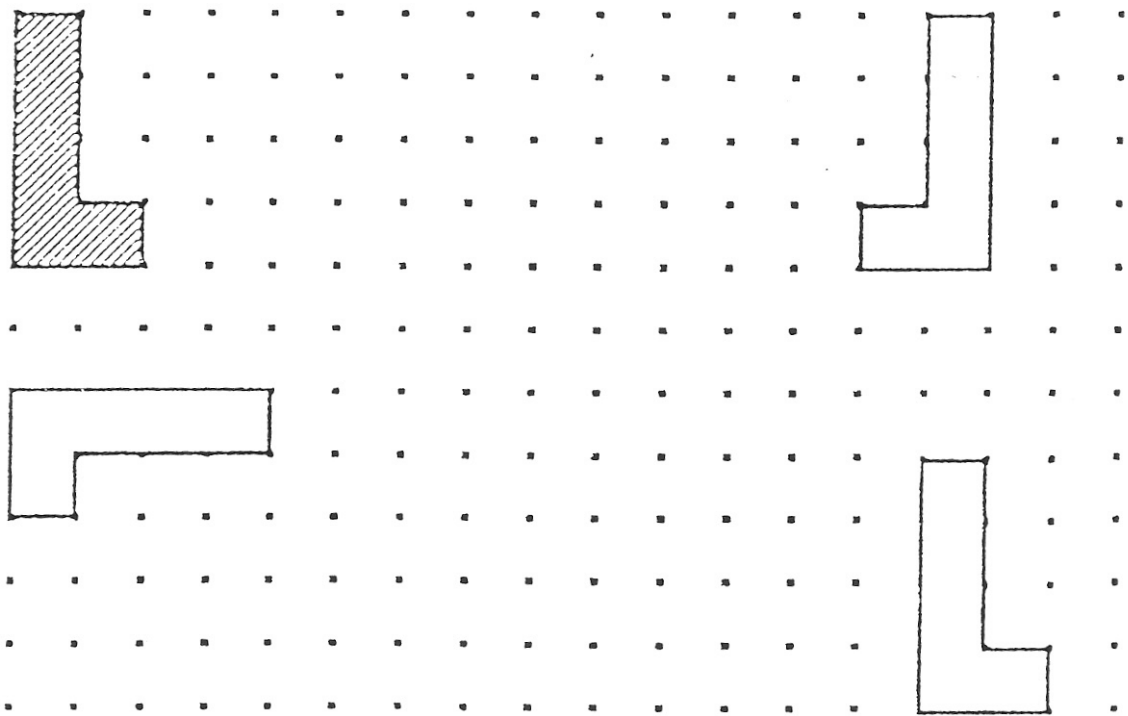
Completa a flor de modo que, quando a flor estiver completa, se possa rodar em torno do centro do geoplano (sem ser de uma volta completa) e ela fique numa posição em que pareça não se ter mexido.



VIII (A)

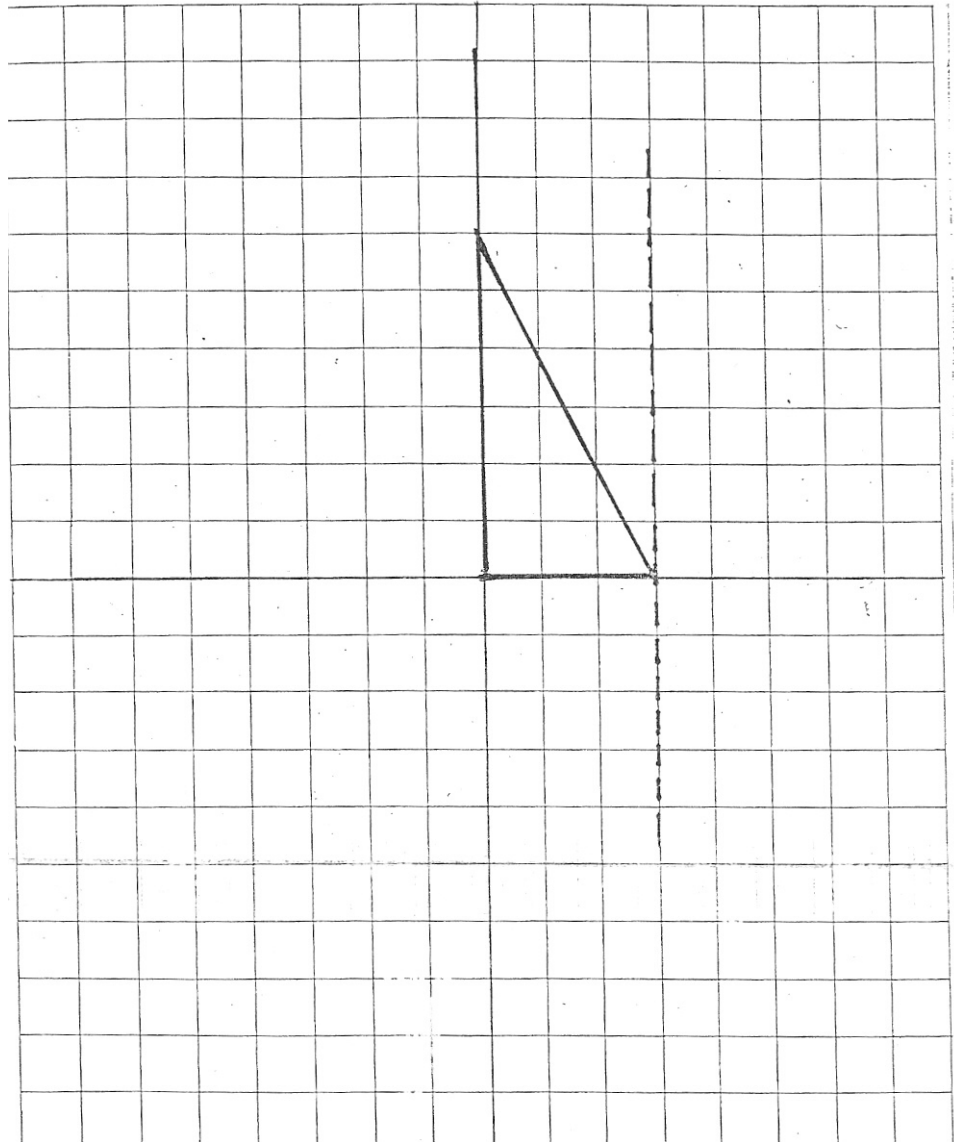
Com que movimentos se pode mover a figura sombreada até a fazer coincidir com cada uma das outras figuras?

(Usa se precisares, a transparência com a figura sombreada para movimentares essa mesma figura)



VIII (B)

Repara no triângulo da figura

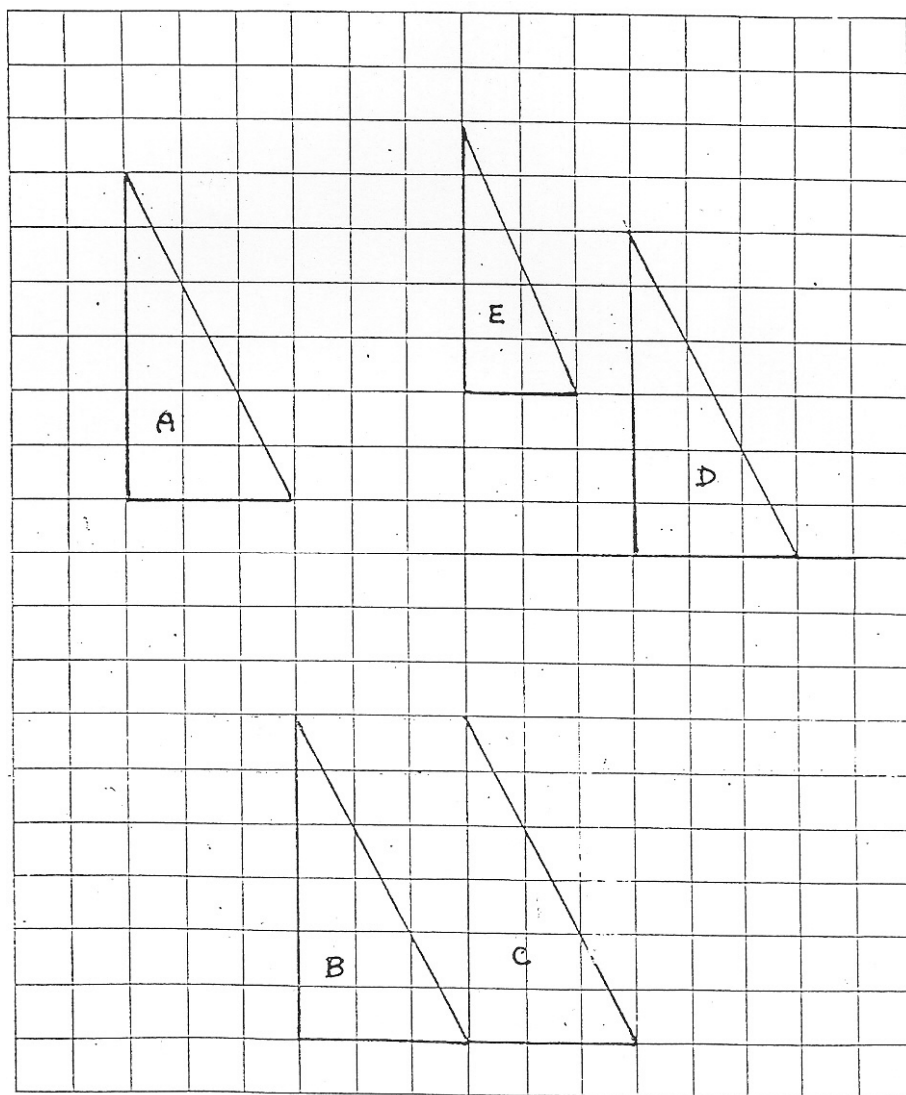


- Imagina que o triângulo é deslizado na horizontal três quadrículas para a direita, qual das figuras A, B, C, D ou E de VIII (B1) se parece com o que tu imaginaste?

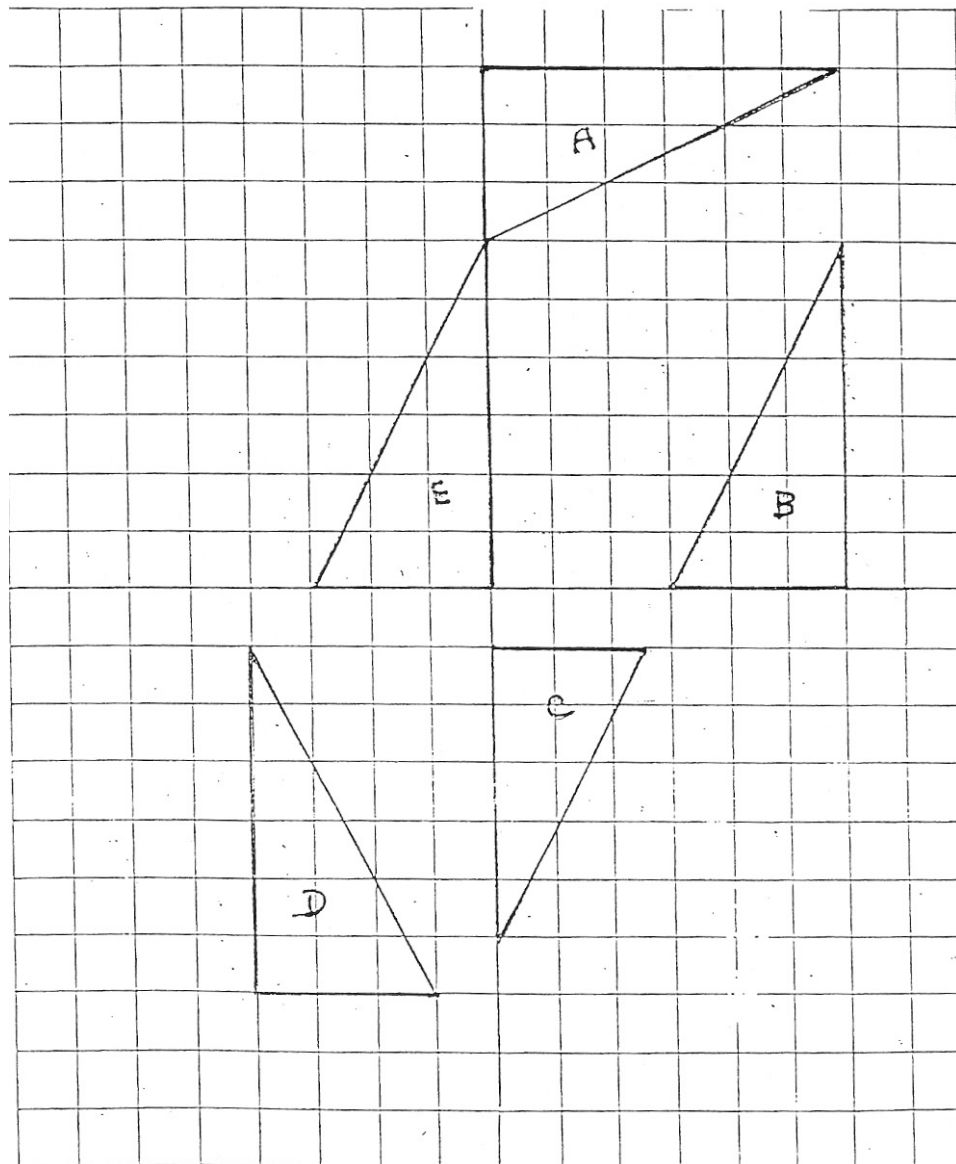
- Supõe que colocas um espelho verticalmente em cima da linha a ponteadado, e imaginas a imagem do triângulo dada pelo espelho. Quais das figuras A, B, C, D ou E de VIII (B2) se parecem com o que tu imaginaste?

- Indica qual das figuras A, B, C, D ou E de VIII (B3) o triângulo que te mostro se parece, quando o rodas para a direita de um quarto de volta, em torno do vértice do ângulo recto desse triângulo.

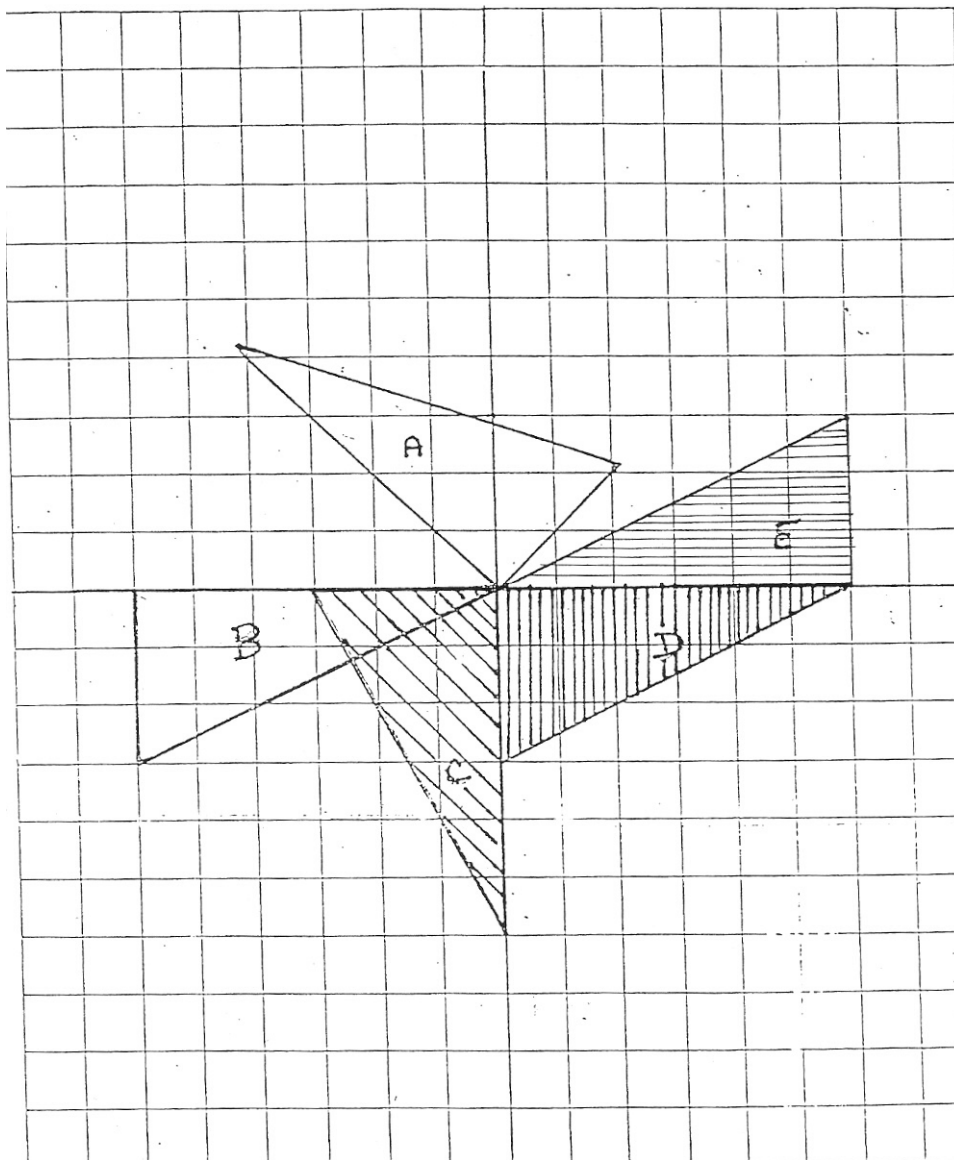
VIII (B1)



VIII (B2)

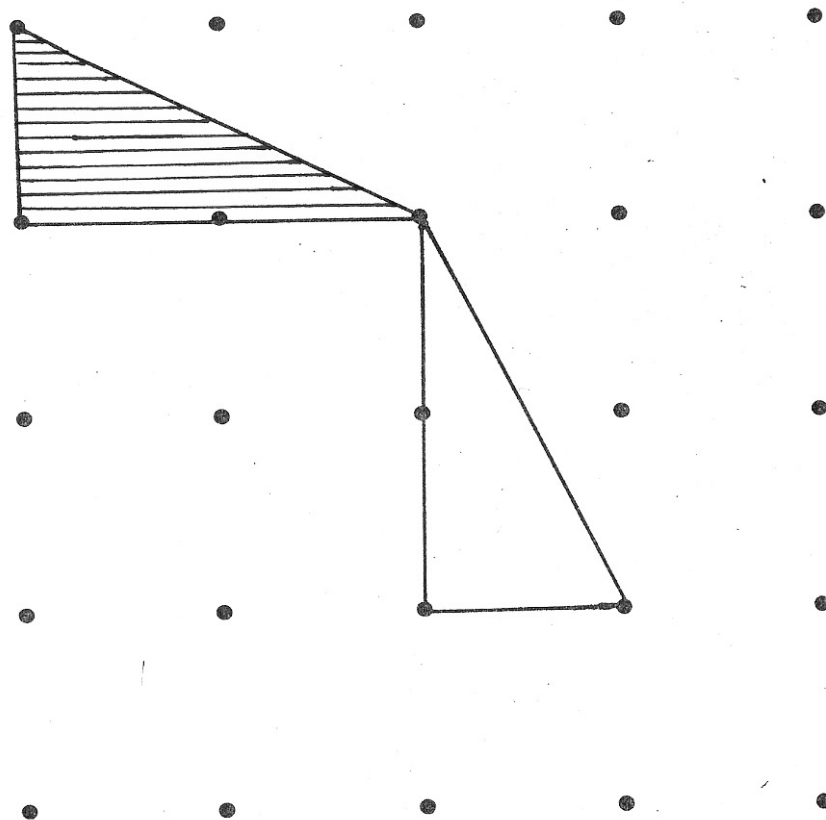


VIII (B3)



VIII (C)

Tu e um teu amigo ides fazer um jogo ao telefone. Aqui está o que o teu amigo vê. (Ao aluno é lhe mostrada uma versão do diagrama abaixo que só tem o triângulo a tracejado). Aqui está o que tu vês. (Ao aluno mostra-se-lhe o diagrama abaixo). Como dirias ao teu amigo para movimentar a peça triangular a tracejado de forma que ela se encaixe perfeitamente no segundo triângulo. Lembra-te que estás a falar ao telefone, o teu amigo não te pode ver, nem à tua figura. Podes usar uma peça triangular para te ajudar.



ANEXO B

**Transcrições de partes das actividades do grupo 1 e do grupo 2 quando
resolviam a tarefa *flor***

B.1. Transcrição de parte das actividades do grupo 1 (Abel e Delfim) quando na aula resolviam a tarefa *flor*, usando o micromundo Tarta



Delfim chamou o Tarta, para isso teclou *t*, e no ecrã apareceu o triângulo T1.



1 Abel: *Vai bem. Espera, espera.* (O Abel olha para o Tarta do ecrã, pega na folha da tarefa e depois de ter olhado para ela, diz)

2 Abel: *Estes Tartas não têm...*

3 Abel: *Ó professora estes Tartas ...* (Começou a chamar apontava um triângulo, não se percebe. Aparece o informático, os dois alunos falam para ele inaudível. O informático coloca a folha da tarefa junto do ecrã para que os alunos possam comparar melhor as imagens e não disse nada).

4 Delfim: *Ai é assim?*

5 Abel: *Aqui é o ponto...*

(Não se percebe o que eles dizem, ficam sozinhos a olhar um para o outro. Abel começa por arrastar o seu dedo sobre o ecrã para cima, pôs as mãos na cabeça e com a mão direita sobre o ecrã, roda-a para a esquerda, indicando ao colega o movimento a que deveria ser submetido o Tarta e diz:)

6 Abel: *Vira isso.*

(Delfim começou a teclar mas relembrou os comandos e logo emendou o Abel, ameaçando de pancada com o dedo indicador da mão direita.)

7 Delfim: *Rodar*

(Delfim começou a teclar a palavra, entretanto Abel também parecia querer teclar mas Delfim afastou-lhe a mão e surgiu uma caixa de erro, pois não tinha sido indicado de quanto deveria ser rodado).

8 Delfim: *Não, é roda* (tecla *roda 90* seguido de *enter*, aparecendo no ecrã T2).



9 Delfim: *Olha agora é apa.* (Tecla *apa* para apagar a figura anterior, ficando no ecrã apenas a figura T3).



Abel mexe nas teclas para mudar o passo do Tarta, como se podia ver pelo aparecimento da caixa. Entretanto Delfim impede Abel de mexer nas teclas).

10 Inv.: *Se precisam de um Tarta, aqui está ele.* (A investigadora deixa ficar um triângulo de papel semelhante ao Tarta. Os dois alunos não ligam nenhuma e Delfim coloca o Tarta de papel ao lado do monitor, pois o sítio onde fora colocado incomodava-os).

11 Abel: *l, enter e vira* (Abel tecla *l*, escolhe dois pontos para construir uma linha, e depois disso, tecla *vira* e o Tarta foi virado em torno dessa linha, assim foi obtida no ecrã a figura T4.



Agora Abel pega na folha da tarefa, mostrou-a a Delfim e os dois comparam a figura da folha da tarefa com a do ecrã. Abel indica com o dedo como deviam continuar a construir, para a direita:)

12 Abel: *Isto está para a primeira.*

13 Delfim: *Não, Não. Agora tem de se ...* (com um dedo da mão direita aponta no ecrã a figura e, assobiando aponta agora na direcção da sua esquerda, a oposta do colega. Continuam a discutir e Delfim simula virar com as mãos) *e depois vira com este.* Aponta para a figura T4 do ecrã).

14 Abel: *Não.* (Abel mexe no ecrã com a mão para a direita e alarga a mão no ecrã) *pode ficar aqui.*

15 Delfim: *Não.* (Aponta no ecrã com a mão a outra direcção para construir a figura).

16 Abel: (Abel diz qualquer coisa inaudível) *pois se deixarmos...* (mexendo com as mãos no ecrã).

(Delfim começa a teclar, carregando duas vezes em *enter*. A figura do ecrã T4 não se moveu.)

17 Abel: *dd.*

18 Delfim: *Ai ai e agora disparate* (põe a mão na cabeça).

(Abel começa a escrever no teclado *de* seguido de outra letra e aparece uma caixa de erros).

19 Delfim: *É apa.*

(Abel tecla *apa*, a figura não se modifica, cada aluno aponta no ecrã, como quer que a figura se mova, continuam a não se entender, aparece outra caixa de erros, resultante do Abel continuar a teclar.)

20 Delfim: *Ai, Não ... Mas agora não fica bem.*

(Durante algum tempo os alunos discutem e o trabalho não avança.)

...

34 Abel: (abana com a cabeça afirmativamente) *Desfaz.*

(Delfim demora a apagar. Apareceu a figura T10)



35 Delfim: *Estás a ver?*

(Delfim apontando para a figura T10 do ecrã, resolveu então teclar *pa* para mudar o passo ao Tarta. Apareceu uma caixa, escreveu 30 na caixa e depois teclou *dd* seguido de *enter*. O Tarta deslocou-se e a figura T11 foi construída.



(Abel fica pensativo e diz).

36 Abel: *Okey*.

37 Abel: *Era para cima*.

38 Delfim: *Porquê?*

39 Abel: *É para cima*. (Faz os movimentos com a mão no ecrã a indicar o local onde deveria o Tarta ir e olha para a folha onde estava a tarefa).

40 Delfim: *Qual é?*

41 Abel: *É este e depois viras para baixo*. (Abel olha sempre para a folha da tarefa e na respectiva flor indica ao Delfim).

42 Delfim: *Então se é este* (aponta com o dedo a *flor* da folha da tarefa) *para ficar melhor, depois começa para aqui* (indica com a mão no ecrã, o sentido esquerdo).

43 Abel: (Abana com a cabeça) *Não*.

(Delfim chama a caixa para mudar o passo, tecla *cm*).

44 Delfim: *E agora?*

45 Abel: *Desliza para cima*.

46 Delfim: *Qual é o que estás a fazer, este ou aquele?* (Aponta para a *flor* da folha da tarefa)

47 Abel: *Esta* (Delfim tecla *dc* e surge no ecrã figura T12).



48 Abel: (Bate no braço de Delfim) *apa*.

(Delfim tecla *apa* para apagar o Tarta anterior e surge no ecrã a construção T13)



49 Delfim: *E agora?*

50 Abel: *pa, enter, l, virar enter*.

(Ficam os dois alunos a pensar um pouco, olhando para a figura do ecrã, falavam entre si, mas era indistinguível ... Abel muda o passo do Tarta, como se pode ver pelo aparecimento da caixa, tecla *l*, para mandar construir uma linha, com as setas de direcção escolhe os pontos por onde essa linha irá passar e manda virar, apareceu a nova construção no ecrã T14).



(Abel fica tão contente que bate as palmas e põe-se aos pulos a cantar. Delfim está muito calado, espantado com a alegria do colega e não muito crente no que via, e parecendo não perceber o pensamento do Abel. Este mexe com as mãos na cabeça e nos cabelos faz o movimento correcto com a mão no ecrã, para dar a indicação do movimento, direcção e sentido).

51 Abel: *Desliza para baix.o*

(Sai para ir dar uma volta. Delfim então muda o passo para *cm*, fazendo aparecer a caixa de mudança do passo, faz o que colega lhe mandou, teclando *db* seguido de *enter* e surge-lhe a construção T15



e começa a gritar:)

52 Delfim: *Estás a ver, está mal, está mal, Abel... Estás a ver, estás a ver...*

53 Abel: (Chega-se ao pé do computador, pensa uns segundos) *Não. Desliza para baixo.* (Simultaneamente faz um gesto com a mão para baixo.)

(Delfim tecla o que o colega lhe mandou, *db* e apareceu uma nova construção T16.)



54 Abel: *apa.*

55 Delfim: *apa* (indicando com o dedo que estava a perceber). *Agora sou eu que faço.*

(Delfim fez a construção T17).



(Abel chama pela professora para lhe mostrar o que tinham feito enquanto Delfim continua a construir a *flor*, mudando o passo, para “passo 1”, identificando recta em torno da qual iria virar o Tarta, e procurando os respectivos pontos para a recta de viragem ser traçada).

56 Delfim: *Ora vira, vira, vira.* (Delfim, cantarolando e fazendo gestos com a mão de contentamento, faz a construção T18.)



57 Abel: *Ó Professora veja o nosso?*

58 Inv.: *Está bem. Então qual é o problema?... É porque vocês usam o passo 1 e assim ... o vosso olho não pode ver exactamente ...*

(Delfim apaga a última figura que fez e tenta fazê-la outra vez, com a ajuda do colega e sem usar o passo 1. Nota-se o aparecimento de caixas relativas aos “passos”, têm alguma dificuldade...).

59 Delfim: *Vês ?*

(Discutem um pouco ... Abel pega na folha da tarefa que contem a *flor*, mostra-a ao Delfim e depois vão compará-la com a figura do ecrã T18).

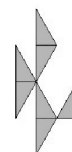
60 Delfim: *Pois está bem, viramos aqui.* (Indicando no ecrã com a mão a linha de viragem.) *Põem-se aqui a linha.* (Com o dedo traça novamente no ecrã uma linha (recta) vertical, exactamente a vertical mais à direita que se pode imaginar traçar em T18.)

(A Professora chega e dá aos alunos alguma indicação que não se percebe, depois ficam novamente sózinhos, mas sem saber o que fazer. Depois enquanto Abel pensa como virar e aponta pontos possíveis para a linha de viragem, Delfim começa a teclar tentando procurar os pontos por onde a linha de viragem deve passar. Os dois alunos manipulam no ecrã o Tarta de papel para terem a percepção das linhas de viragem)

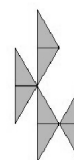
61 Delfim: *Como se tira a linha, depois de se fazer?* (Faz o gesto de virar com a mão.)

62 Informático: *Depois de chamar o Tarta faz-se um refaz.*

(Abel e Delfim em colaboração constróiem a figura T19.)



(Depois, enquanto Abel observa, Delfim está ao teclado, por vezes discordam e quase sem ajuda do Abel, o Delfim faz a construção T20 usando o movimento virar.)



63 Delfim: (Quando acaba de construir T20.) *Estás a ver como ia bem.*

(Agora trocaram os papéis e Delfim dizia o que Abel devia fazer e este teclava)

64 Delfim: *Nesta linha aqui* (aponta no ecrã a linha horizontal imaginada que passa no meio da figura *flor*) *viras. Não é?*

65 Abel: (Abana com a cabeça em sinal de concordância.) *Sim.*

(Abel fica sozinho a definir a linha em torno da qual o Tarta iria virar, entretanto acontece algo na sala que o fez levantar para verificar ... Depois, quando regressa ao lugar, manda *virar* e aparecer um triângulo na construção T21



que ele não tinha previsto, pois provavelmente tinha mentalmente trocado o Tarta que estava activo e grita:)

66 Abel: *Ah!!!* (Simultaneamente põe a mão na boca.)

67 Delfim: *O que é?*

(Abel tenta explicar o que aconteceu, usando também as mãos ..., não se percebe o que diz ... Em seguida desfaz e muda o passo de 1 e torna a fazer de novo T21 para se poder ver melhor. Quando acabou dá um grito de satisfação e deixa o Delfim a continuar a tarefa. Este continua o trabalho de Abel mexe um pouco, não faz nada de novo e começa a chamar o colega.)

68 Delfim: *Abel. Abel. Linha?*

69 Abel: *Sim*

70 Delfim: *pa* (Muda o passo, *passo 1*, para poder definir os pontos da linha, e chama) *Abel*. (Escolhe os pontos, manda traçar a linha e, antes de teclar *virar* chama novamente o Abel. Abel chega e Delfim mostra-lhe o “*passo 1*” apontando para a caixa do passo, entretanto aparece o Informático e ele pergunta-lhe algo... inaudível, Delfim tecla *vira* e apareceu uma figura um pouco torta T22.)



(Abel foi ajudar e engana-se, depois desfaz o último Tarta feito e deixa a recta definida pelos seus pontos e sai. Delfim continua o trabalho que era só virar em torno da recta já definida, começa a cantar, mas quando vê o resultado da respectiva acção, virar, pára estarecido e começa a gritar:)

71 Delfim: *Abel, olha aqui para baixo.*

(Apontava a distância entre os triângulos e começou a gritar Professora, como ninguém foi em seu auxílio...)

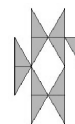
72 Abel: *dd* (Faz o gesto)

(Delfim começa por mudar o passo).

73 Novo aluno: *Tudo bem?*

74 Delfim: *Naaaaão ...*

(O aluno desaparece e Delfim tecla *dd* e um novo Tarta apareceu, construção T23.)

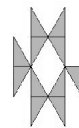


(Agora era a vez de Abel teclar, indica com o dedo qual é o próximo movimento, sem o nomear, Delfim vai em seu auxílio)

75 Delfim: *db*.

76 Abel: *pa ... e db e apa.*

(Abel vê o resultado pretendido, construção T24 e bate as palmas, Delfim finge que toca guitarra com as mãos).



77 Delfim: *Agora viro*

(Abel tecla “*pa*”, aparece a respectiva caixa.)

78 Delfim: *pa? Que estás a fazer? Não dá para virar. Para quê?*

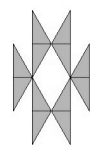
(Abel... inaudível...)

79 Delfim: *Está bem, mas fica mal* (saiu).

(Abel fica parado, sem fazer nada a olhar para o computador do lado e às tantas foi-se embora, porque era a vez de Delfim. Este aparece a cantar.)

80 Delfim: *Vira, vira, vira.*

(Tecla *vira* e acaba a tarefa *flor*, construção T25, fica a olhar e continua cantar. Pega no boné e vai-se embora, a aula também tinha terminado.)



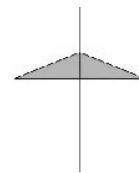
B.2. Transcrição de parte das actividades do grupo 2 (Edgar e Gil) quando na aula resolviam a tarefa *flor*, usando o micromundo Tarta



(O Tarta está no ecrã, figura R1



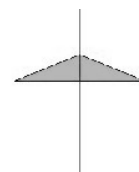
e os alunos conversam. O Edgar tecla *vira*, o Gil muda a cor ao Tarta e apareceu no ecrã R2.



Durante uns segundos ficam parados sem fazerem nada, depois Edgar tecla *apa* e aparece no ecrã R3.



Os alunos teclam várias vezes *vira*, aparecem caixas de erro ... e estão parados, um com a mão na cabeça a olhar para o lado, aparece no ecrã R4



a investigadora entretanto deixa-lhes um Tarta de papel).

- 1 Inv: *Aqui está um Tarta. O Tarta estava assim* (manipula o Tarta de papel, pára). *Por onde vais começar a tua figura?*
- 2 Edgar: *Esta* (aponta um Tarta).
- 3 Inv: *Esta? Aqui por cima? Então pronto. Então por cima... se calhar é melhor começares pela orelha? Como quizeres ... Se começares pela orelha, depois vais fazer aqui para baixo.* (Compara apontando com o dedo, o Tarta da figura da folha com o que está no ecrã e faz o movimento rodar com a mão, no ecrã, para mostrar como o Tarta se deveria movimentar.)

Isto é igual, não é?... Tens assim o teu Tarta (o de papel e manipula-o), primeiro...é melhor fazeres desfaz, (olha para o ecrã e, tecla desfaz, no ecrã aparece a figura R5).



4 Inv: *Tu queres pôr o Tarta...Porque orelha queres começar? Começas por esta.*

(Os alunos olham para o Tarta que a investigadora aponta)

5 Inv.: *Está assim, não está?* (manipula o Tarta de papel). *Se eu quizer pôr assim (roda a peça). O que faço?*

6 Gil: *Rodo*

7 Inv: *Em torno de que ponto?*

8 Gil e Edgar: *Este* (Apontam o vértice do ângulo recto).

9 Inv: *Rodo de quanto?* (Roda o Tarta de papel de 90° no sentido do movimento dos ponteiros do relógio)

10 Edgar: *De 90°.*

11 Inv: *Continuem...*

12 Edgar: *roda 90* seguido de *enter*, aparece a figura R6



13 Gil: *apa*, figura R7



14 Gil: *Agora vira*

15 Edgar: (olha para a folha de trabalho, faz com o dedo, no Tarta do ecrã, um movimento para baixo)

16 Gil: *vira* (tecla *vira*, aparece a figura R8 mas não é aquela que tinham pensado)



17 Edgar: (aponta no ecrã com o dedo que é para baixo e tecla *apa*, aparece R9 e repete, com o dedo no ecrã, o movimento para baixo)



18 Gil: *apa*

19 Edgar: *Não*

(Teclam *l* e nas teclas de direcção, nada acontece, teclam *pa* e aparece a caixa para mudar o passo do Tarta.)

20 Inv.: *E agora o que vão fazer? Fazer qual?*

21 Edgar: *A gente enganou-se.*

22 Inv.: *Está bem, está óptimo.* (Todos olham para a folha de trabalho) *o que vão fazer?*

23 Edgar: *Virar*

24 Inv.: *Em torno de que linha?*

25 Edgar: *Esta* (com o dedo indica no ecrã a linha de viragem).

26 Inv.: *E depois?*

(Depois de se certificar que os alunos estão a perceber o que fazem, a investigadora deixa os alunos a trabalhar sózinhos. Edgar tecla em *enter* duas vezes, depois em *l* e depois em *enter* e nada acontece. Os dois tentam muitas vezes ...)

27 Gil: *É em torno deste ponto* (aponta para a figura no ecrã).

28 Edgar e Gil: *l enter*

(Escolhem em conjunto, os pontos da linha de viragem, usam as setas de direcção várias vezes).

29 Edgar: *Vira* (Aparece no ecrã figura R10).



(Edgar carrega em *l* seguido de *enter*, aponta no ecrã, com o dedo uma linha vertical a passar no vértice mais à esquerda do Tarta).

30 Edgar: *Já sei* (Os dois alunos em equipa ora um escreve *l* ora o outro escolhe os pontos).

31 Edgar: *vira* seguido de *enter* e aparece R11 no ecrã)



(Os alunos ficam indecisos, pelo menos durante 10 minutos, a olhar para o ecrã e carregam umas vezes em *enter*, outras nas setas de direcção, outras teclam *l* ou em *pa*, aparecem por vezes caixas de erro. O Gil levanta-se e vai ter com os alunos que estão no outro computador, Edgar vai teclando. Entretanto o Gil volta e retoma o teclado. Aparece agora a colega do computador ao lado que insistentemente carrega nas setas de direcção, depois Edgar tecla *vira*, nada acontece)

32 Inv: *...Vamos pôr para cima* (faz o gesto no ecrã...) *pode estar a linha torta.*

(Carrega em *l* escolhe os pontos da linha de viragem com as setas de direcção e sai porque é chamada)

33 Edgar: *vira* seguido de *enter* (aparece R12 no ecrã).



34 Inv: *Já vai melhor. E agora? Vamos olhar para aqui* (figura da folha de trabalho). *Ora bem ... Qual é aqui o triângulo igual a este* (último Tarta construído)?

35 Edgar: *É este.*

36 Inv: *Agora é deslizar para baixo. Quanto vamos deslizar?* (aponta no ecrã com o dedo a quantidade a deslizar) *É o cateto maior, é cm. Vamos mudar o passo* (escreve *pa* aparece a caixa de mudanças e ela escreve *cm*). *Agora desliza para baixo* (escreve *db* seguido de *enter* e novamente *db* seguido de *enter*), e *apa* (Surge a figura R13)



e agora não digo mais.

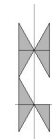
(Edgar faz no ecrã um movimento com a mão para indicar um possível movimento para o Tarta, depois há grandes pausas, tecla *pa*, muda o passo...chega o informático, mexe no ecrã mas, não ajuda nada...)

37 Inv.: *Pronto. Como é que tu queres? Por onde queres ir ?* (Com as mãos no desenho da *flor* na folha de trabalho a investigadora tentou que os alunos observassem e apontassem que parte do desenho já estava construído no ecrã e o que se deveria fazer em seguida. Depois, carrega em *l*, escolhe os pontos da linha de viragem e tecla *vira*, aparece então o desenho R14.)



38 Inv.: *Pronto. Agora faz tu.* (Vai-se embora. O Gil desinteressou-se e brinca com o rato.)

39 Edgar: *l* seguido de *enter*. (Edgar escolhe os pontos da recta de viragem, usando as setas de direcção e tecla *vira*. Aparece no ecrã R15.)



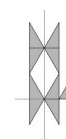
(Depois tecla novamente *l*, escolhe os pontos da linha (recta) de viragem, agora linha horizontal e tecla *vira*. Aparece no ecrã R16.)



40 Inv: *E agora? Olha para aqui. Já tens isto* (faz com que os alunos olhem para a folha de trabalho e comparem os desenhos) *Este é igual a qual?*

41 Gil: *Esta* (apontando na folha de trabalho).

42 Inv: *Então como é que tu fazes? ...Então deslizas para a direita e depois para cima.* (Vai ajudando o Gil ditando e verificando se ele faz bem, aparece no ecrã R17.)



E agora o que falta para fazer a outra parte?

43 Edgar: *Vira.*

...

ANEXO C

**Sessões do ambiente de ensino que dá ênfase aos movimentos, rodar, virar e
deslizar (turma B)**

Sessão introdutória

Principais objectivos:

- Relembrar ou desenvolver duma forma informal alguns conceitos geométricos, usando quer o corpo, quer outros materiais manipulativos.
- Representar no plano do chão, plano do quadro e no plano do papel esses mesmos conceitos geométricos.

Materiais:

Giz, quadro preto, papel.

Objectivos específicos:

- dar ênfase à necessidade da precisão da linguagem;
- desenvolver a direcionalidade direita e esquerda (sentido do movimento dos ponteiros do relógio e sentido contrário);
- integrar dois esquemas "volta como movimento do corpo" e "volta como número" .
- desenvolver os conceitos de quarto de volta, meia volta, ângulo recto, direcção, sentido, direcções paralelas, direcções perpendiculares, direcção horizontal e direcção vertical, rectas paralelas e rectas perpendiculares.
- usar diferentes representações para o mesmo conceito.
- desenvolver o pensamento visual-espacial.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

Um menino faz de robot, segue as direcções dadas pela professora para encontrar um tesouro que está algures na sala de aula. Um outro aluno, assinala no chão com o giz, o caminho por onde o robot passa. Os restantes alunos assistem ao desenrolar do processo.

O robot está num dos cantos da sala de aula e vai executar as ordens dadas pela professora.

A professora diz-lhe: *Roda em torno dos teus pés um quarto de volta (roda de 90°) no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Segue a direcção da largura da sala e dá dois passos em frente. Agora o robot vai mudar novamente de direcção, para isso vai rodar em torno dos seus pés, para a esquerda de um quarto de volta e na direcção do comprimento da sala dá cinco passos (ultrapassa o tesouro).*

A professora pergunta à turma: *O que fazer?* Se ninguém sugerir nada, diz ao robot: *Inverte a marcha, isto é, dá meia volta (roda de 180°) em torno dos teus pés, mudando de sentido e*

continuando na mesma direcção, dá 2 passos e apanha o tesouro.

Em seguida a professora pergunta à turma:

- . Quantas mudanças de direcção o robot fez?*
- . Quantos ângulos rectos o robot descreveu?*
- . Que nome se dá às direcções que fazem entre si ângulos rectos?*
- . Mostrem-me duas direcções paralelas, isto é, alinhadas.*
- . Mostrem-me duas direcções perpendiculares.*

Um menino é convidado a desenhar no quadro preto o trajecto que o robot percorreu, ajudado sempre que necessário pelos outros meninos ou por questões postas pela professora. Grupos de 3 meninos vão depois inventar no caderno um percurso diferente para o robot apanhar o tesouro. Só podem usar dois tipos de direcções: a direcção da largura da sala e a do comprimento da sala, isto é a direcção horizontal e a direcção vertical. Dois grupos são escolhidos ao acaso para mandarem as instruções ao robot. A professora ainda pergunta: *Qual é o percurso mais curto que o robot percorre?*

Trabalho de casa

Cada aluno vai desenhar no seu caderno, o percurso que o leva da sua escola a casa. *(Na aula seguinte todos os meninos individualmente, mostraram os seus percursos à Professora relativamente aos quais lhes foram postas questões para esclarecimento dos conceitos tratados).*

1ª Sessão “Os movimentos”

Principais objectivos

- Ilustrar os movimentos rodar, virar e deslizar.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial.
- Continuar a construção dum cartaz sobre as transformações (já iniciado pela Professora) e que sensibilize as crianças para as três transformações geométricas euclidianas (translação, rotação e reflexão) através de situações da vida quotidiana.

Materiais

Cartões de formas e desenhos (alguns em duplicado), objectos concretos ou figuras desses objectos (maçã, colmeia, laranja, concha, borboleta, flores), papéis de embrulho, fotografias, figuras de rodas de carros, trabalhos do Escher, trabalhos de Arqueologia, máquinas de passar “slides” de dois tipos.

Objectivos específicos

- Reconhecer os movimentos deslizar, virar e rodar
- Reconhecer que duas figuras têm a mesma forma e o mesmo tamanho, se uma se sobrepõe exactamente à outra.
- Determinar se duas figuras têm a mesma forma e o mesmo tamanho usando um movimento ou uma sequência de movimentos.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

Professora: *Nós há pouco estivemos a tentar ver como montar uns “slides”. Lembram-se ainda como era esta máquina?*

Alunos: *Sim*

Professora: *Vamos então olhar para aqui. Há bocado, esta máquina... os “slides”... como é que eu consegui que eles passassem aqui? Metiam-se aqui os “slides”, depois metiam-se nesta máquina e o que acontecia a ela?*

Alunos: *Rodava.*

Professora: *Esta rodava. Vamos lá comparar aquela máquina com esta. O que aconteceu quando meti os “slides”? Também rodavam?*

Alunos: *Não*

Professora: *Como é que fazia? Estão a ver a máquina? Isto funcionava como fosse o quê?...O que acontece? Escorregava ou não escorregava? Isto não vos lembra nada?*

Aluno: *Sim, um elevador.*

Professora: *E mais?*

Aluno: *Um escorrega.*

Professora: *Este movimento que faz esta máquina dos “slides” é igual ao movimento que fazia a outra máquina?*

Alunos: *Não*

Professora: *Como era aquele?*

Alunos: *Rodava*

Professora: *E este?*

Alunos: *Andava para a frente... escorregava.*

Professora: *São capazes de arranjar outro termo em vez de escorregar?*

Alunos: *...Cair...deslizar.*

Professora: *Ora esta rodava, aquela deslizava. Por exemplo, se eu aqui meter a chave na fechadura da gaveta, o que faço à chave?*

Alunos: *Rodo*

Professora: *Rodo a chave. Vocês em vossa casa, alguns têm guarda fatos na parede. Há umas portas que abrem e há outras que...?*

Alunos: *Deslizam.*

Professora: *Já vimos o movimento rodar, já vimos o movimento deslizar. Agora vamos lá ver...O que é que estou a fazer?* (a professora vira folhas).

Alunos: *A virar.*

Professora: *Estou a virar para que lado?*

Alunos: *Para a esquerda.*

Professora: *E agora?*

Alunos: *Para a direita.*

Professora: *Este é o movimento virar. Já viram que o de rodar, o de deslizar e o de virar são três movimentos que nós podemos fazer. Muito bem. Vamos ver se se conseguem lembrar de outro movimento que seja “rodar”.*

Alunos: *...Os ponteiros do relógio.... a roda dos carros.*

Professora: *Para o “deslizar” quem se lembra?*

Alunos: *O escorrega...a neve... a água...os skis.*

Professora: *E virar?*

Alunos: *virar uma mesa....virar uma borracha... virar um carro....virar um caderno,. viraras calças.*

Depois foram dados a cada aluno dois cartões iguais, em que num dos lados do cartão está desenhado um esboço dum menino quando ele está de frente e no outro lado do cartão está desenhado um esboço do menino quando ele está de costas. Os alunos devem escrever os seus nomes nos cartões.

A professora anuncia que vão fazer um jogo com os cartões. Os alunos são então convidados a distribuírem-se por três grupos e colocam-se junto a uma mesa. Depois é pedido a cada menino de um dos grupos que com os seus cartões sobre a mesa, mostre diferentes maneiras de provocar o movimento deslizar (alguns podem deslizar para cima, outros para baixo e ainda outros podem deslizar para a direita ou para a esquerda ou em diagonal). A professora discute com os alunos que tipo de deslizamentos é mais fácil de executar (os outros alunos de pé assistem à conversa e são também convidados a pensar sobre isso).

Professora: *Como posso eu virar? O que acontece ao desenho se eu o viro? Virar é dar uma cambalhota? Se a cabeça no cartão está a apontar para mim no começo, para onde vai apontar depois de ser virada?*

Cada elemento de um outro grupo (os restantes alunos observam) é convidado a virar os seus cartões em torno dos seus lados direitos, em torno dos seus lados esquerdos, em torno dos seus pés.

A professora dirige-se ao grupo que só observou até agora e, pede a cada elemento do grupo que com os seus cartões, mostre uma rotação. Pergunta a um aluno do grupo: *rodou no sentido ...?*

Aluno: *Dos ponteiros do relógio.*

Professora: *Um quarto de volta, diz aqui o teu colega, concordas com ele?*

Aluno: *Sim*

Agora a professora cola com fita adesiva cartões no quadro preto, dispostos em duas linhas como está indicado na figura C.1 e pede individualmente a todos os alunos da turma, para descreverem o movimento/os que leva o cartão isolado na primeira linha às diferentes posições finais da segunda linha: d, c, b, a (NCTM, 1995).

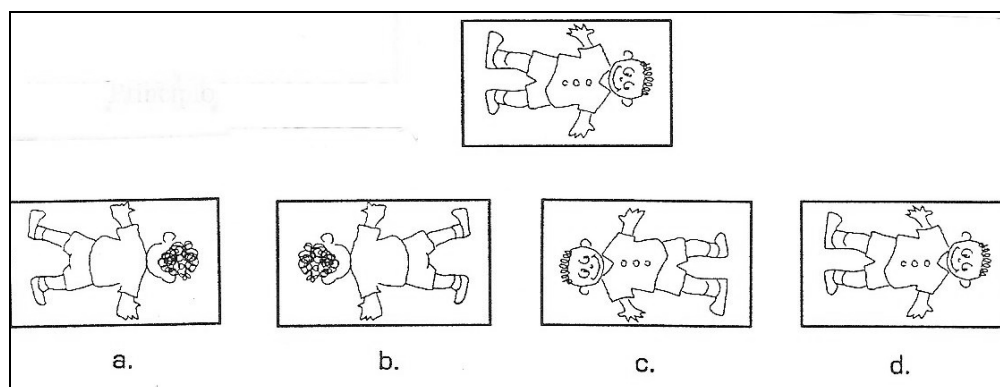


Fig. C.1 Cartões.

Os alunos em grande grupo iam respondendo, várias soluções apareceram. As soluções eram avaliadas por toda a turma e pela professora.

Alguns extractos:

Professora: *Vamos todos olhar. Quero que vocês me digam o que aconteceu a este menino (boneco da linha de cima) até chegar aqui (boneco d). Que movimento é que ele fez?*

Aluno: *Andou na diagonal.*

Professora: *Ele não andou*

Aluno: *deslizou.*

Professora: *Em que direcção?*

Aluno: *Direita e depois deslizou para baixo.*

Outro Aluno: *ou então na diagonal.*

Professora: *Também está bem. E de (d) para (c)?*

Aluno: *Rodou...virou, não, rodou meia volta.*

Professora: *Se rodasse um quarto de volta, como ficava?*

Alunos: *De cabeça para baixo.*

....

A professora fez depois com a turma uma revisão das características dos movimentos e anunciou o jogo do lançamento, e pediu a metade dos alunos que sem barulho fizessem uma roda e se sentassem no chão. Os restantes alunos à volta da roda ficaram de pé.

A professora tomou uma variedade de cartões de figuras, algumas em duplicado, lançou - as ao ar de forma que elas caíssem ao acaso no chão mas no interior da roda. A professora primeiro e depois todos os alunos individualmente, tentaram mostrar como chegar de uma figura a outra figura “que tenha a mesma forma e o mesmo tamanho”. A Professora e os alunos teriam de usar o vocabulário deslizar, rodar ou virar e identificar um movimento ou uma sequência de movimentos que fizesse mover uma figura na outra.

A professora apresentou depois à turma o cartaz intitulado "Transformações geométricas" (figura C.2) dizendo que ele estava por acabar e que acabá-lo seria uma tarefa a executar por os alunos nas próximas sessões. A professora pediu então para os alunos identificarem no cartaz os movimentos de que tinham estado a tratar.

Professora: *Quem quer identificar duas figuras que tenham a mesma forma e o mesmo tamanho? Porque têm a mesma forma e o mesmo tamanho?*

Trabalho de casa

Cada aluno deveria trazer um exemplo de transformação para enriquecer a exposição da sala de aula (*as figuras serão também colocadas no cartaz pelos alunos*).

2ª Sessão “O rodar”

Principais objectivos

Explorar a transformação rotação.

Materiais

Figura numa folha A4 de papel quadriculado, pionês, folha A4 de papel vegetal, folha com uma tarefa, placa de esferovite (tabuleiro de esferovite das embalagens da carne do continente).

Objectivos específicos

- . Manipular o movimento de rotação e familiarizar-se com os elementos que definem uma rotação (centro de rotação, quantidade a rodar e sentido da rotação);
- . Integrar dois esquemas "volta como movimento do corpo" e "volta como número" .
- . Desenvolver os conceitos: ângulo recto, ângulo raso, um quarto de volta, meia volta, centro de rotação, sentido de rotação;
- . Desenvolver o pensamento visual-espacial (por exemplo, quando imaginam o resultado de uma rotação e sombreiam uma grelha para representar esse resultado).

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora pergunta à turma: *Como se movimentam os ponteiros dum relógio? Vamos olhar para os ponteiros deste relógio. O que é que eles fazem?*

Alunos: *Rodam*

Professora: *Em torno de quê?*

Alunos: *Ah... do centro*

A professora diz então que vão fazer um jogo e dá a cada menino, uma figura desenhada numa folha A4 de papel quadriculado (figura C.3) e uma folha A4 de papel vegetal. Pedes-lhes para sobrepor as duas folhas e copiarem só a figura.

Professora: *O que vos parece a figura?*

Alunos: *Uma seta... um rectângulo....um chapéu...um triângulo...uma casa.*

Professora: *A mim parece-me um pinheiro num campo com a forma rectangular.*

Abel: *Um quadro com uma árvore desenhada*

Professora: *Vamos adoptar a ideia de Abel?*

Alunos: *Sim*

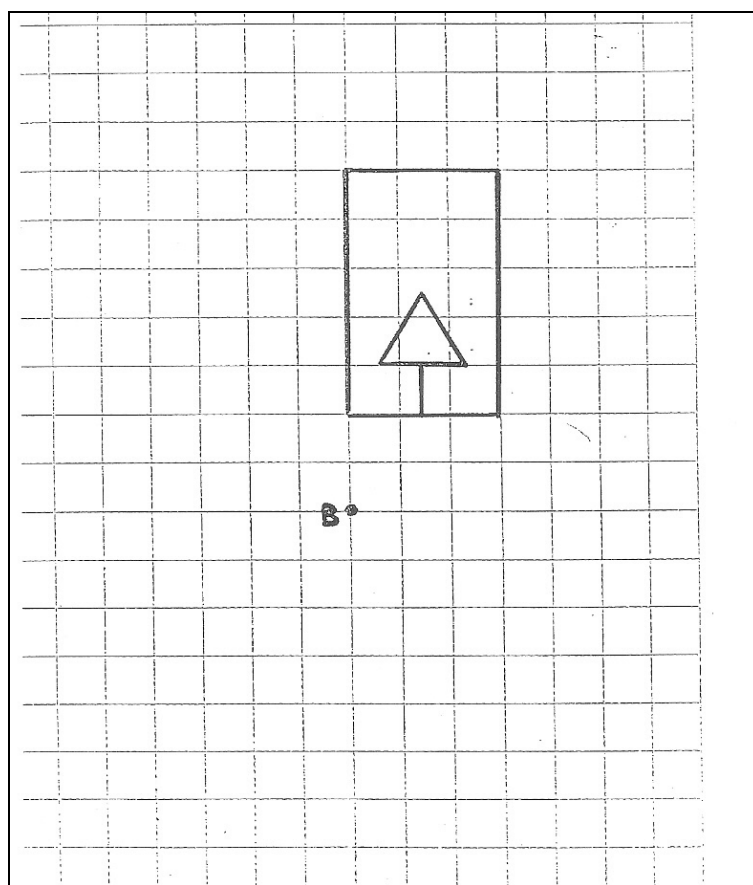


Fig. C.3. Figura desenhada numa folha A4 de papel quadriculado.

A professora diz que decalquem a figura (quadro com uma árvore desenhada) em papel vegetal, virem essa folha de papel vegetal em cima da mesa e passem por cima. Depois disso os alunos devem sobrepor exactamente a figura da folha de papel vegetal com a figura da folha de papel quadriculado, por as duas folhas em cima da placa de esferovite e espetar o pionês na base ou pé da árvore. A professora pede agora aos alunos para decalcarem para o papel quadriculado a figura da folha de papel vegetal nas suas diferentes posições após ter sido sujeita aos seguintes movimentos de rotação.

Professora: *A figura do papel vegetal roda um quarto de volta em torno de um ponto, aquele onde está o pionês, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Já está? Depois vão decalcar a figura toda, isto é o quadro com uma árvore desenhada. ...Agora já todos fizeram? Agora regressam à posição inicial, então... o que vão fazer?*

Aluno: *Rodar um quarto de volta no sentido contrário aos ponteiros do relógio.*

Professora: *Se rodarem um quarto de volta no sentido contrário aos ponteiros do relógio, o que acontece?*

Alunos: *Volta à posição inicial.*

Professora: *Já está? Agora a figura vai rodar meia volta....A que conclusão chegaram?*

Aluno: *Se no sentido dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário, desde que dê meia volta, é a mesma coisa.*

Professora: *Então digam-me lá uma coisa, quando vocês rodaram um quarto de volta, quantos graus é que vocês rodaram?*

Aluno:.... 90°

Professora: *Sara, o que é que tu achas?*

Sara: *Sim. Porque faz um ângulo recto e a abertura do ângulo recto corresponde a 90° .*

Professora: *E quando rodou meia volta, Daniel?*

Daniel: *Ah...*

(a Professora faz com que os alunos recordem que rodar um quarto de volta é rodar de um ângulo recto, 90° , e rodar meia volta é rodar de um ângulo de 180° , e formam um ângulo raso).

A Professora verifica as figuras rodadas e decalcadas em todos os alunos.

Professora: *Em torno de que ponto vocês rodaram há bocado? Onde é que está o pionês?*

Aluno: *no centro.*

Professora: *Porque dizes que é o centro?*

A professora convida agora os alunos a rodarem novamente a figura da mesma maneira que fizeram anteriormente, não em torno do pé da árvore, mas agora em torno do ponto B que está assinalado na folha de papel quadriculado e onde devem agora colocar o pionês.

Professora: *Ao rodar a nossa figura em torno do ponto B ela vai ficar na mesma posição ou em posições diferentes das outras anteriores?*

Alunos: *Diferentes.*

Professora: *Temos que ter cuidado com o ponto em relação ao qual estamos a rodar. ...É muito importante quando mandarmos rodar, nós dizermos em torno de quê nós devemos rodar, num caso foi o ponto B, noutra caso foi o pé da árvore....*

A professora resume para a turma as características do movimento rodar.

A cada aluno a Professora vai dar agora a seguinte folha de tarefas designada “folha com um T “

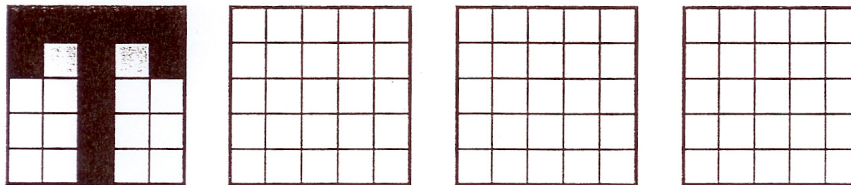
FOLHA DE TAREFAS “folha com um T “

Desenha nos quadrados quadriculados, como vai ficar o **T** depois de imaginares que o **T**:

1 - vai rodar de 90° no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, em torno do centro do quadrado.

2 - vai rodar de meia volta em torno do centro do quadrado.

3 - vai rodar de um quarto de volta para a esquerda, em torno do centro do quadrado. (Kroner,1994)



(se tivessem dificuldade em imaginar os movimentos os alunos podiam usar o pionês e o papel vegetal, depois de lá ter sido previamente decalcado o T)

Finalmente a professora pergunta a alguns alunos o que tinham feito, relativamente a esta última tarefa, obrigando-os assim a usar o vocabulário e a toda a turma avaliar a adequação da respectiva linguagem.

3ª Sessão “O rodar e o geoplano”

Principais objectivos

- Desenvolver o vocabulário para discutir a transformação rotação.
- Desenvolver a capacidade de dar ordens não ambíguas, que transformem por rotação, uma figura na figura imagem.

Materiais

Uma folha A4 onde estão desenhados um geoplano circular e uma figura geométrica; pionês; tesoura; placa de esferovite, folha com modelos de quadrados a preto e branco em grelhas de cinco por cinco; papel vegetal, compasso e cartolina.

Objectivos específicos

- . Reconhecer e executar rotações.
- . Desenvolver o pensamento visual-espacial (por exemplo, quando analisam modelos ou usam grelhas em branco para criarem problemas para os colegas resolverem).
- . Usar correctamente os elementos que caracterizam uma rotação.
- . Desenvolver o conhecimento sobre medidas de ângulos.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora distribui a cada aluno uma folha A4, ver figura C.4, onde estão desenhados um geoplano circular e uma figura geométrica, desenhada em duplicado. A professora apresenta aos alunos o geoplano circular e compara-o com o geoplano quadrangular, que eles já conhecem. Pede aos alunos que na folha que lhes foi distribuída, recortem com a tesoura a figura geométrica que não está construída sobre o geoplano circular. A professora diz à turma que todos têm um geoplano circular, só ela é que não tem e que precisa da ajuda deles para construir no quadro um geoplano. O geoplano é então construído em conjunto e em grande grupo numa discussão entre toda a turma conduzida pela professora.

Professora: *O que tenho de fazer já em primeiro lugar?*

Alunos: *Pegar no compasso, marcar o centro.*

Professora: *E agora?*

Alunos: *Rodar.*

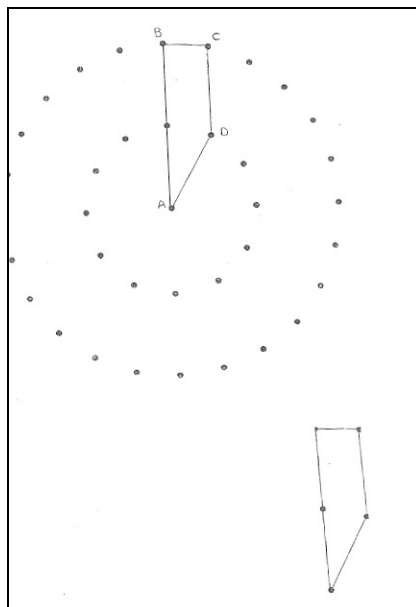


Fig. C.4. Geoplano circular e figuras geométricas.

Professora: *Quanto?*

Aluno: *Uma volta inteira.*

Professora: *Com que raio vocês querem que eu faça isto? Vou fazer com 30 cm. Meçam os raios das vossas circunferências.*

Aluno: *3,5.*

Professora: *E a maior?*

Aluno: *7.*

Professora: *Quanto é que a maior mede a mais que a mais pequena? Se uma mede 3,5 e a outra mede 7, que relação há entre uma e outra?*

Aluno: *É o dobro*

Professora: *É melhor pormos 20 cm para o raio da circunferência mais pequena, se não, não cabe no quadro preto a maior. Quanto mede o raio da maior?*

Aluno: *40.*

Professora: *Agora o que vamos fazer a seguir?*

Alunos: *Marcar pontinhos.*

Professora: *O que temos de traçar em primeiro lugar?*

Alunos: *O diâmetro...traçamos o raio...*

Professora: *Eu vejo dois diâmetros.*

Aluno: *Ah! é o diâmetro da circunferência mais pequena e o da circunferência maior.*

Professora: *Posso só traçar este diâmetro?*

Aluno: *Não... traço na vertical.*

Professora: *Como sabemos que está na vertical?*

Aluno: *Tínhamos que saber se faziam linhas perfeitas.*

Professora: *Linhas perpendiculares, é?*

Alunos: *...Ângulos rectos.*

Professora: *Quantos ângulos rectos é que eles fazem?*

Alunos: *Quatro.*

Professora: *Quanto corresponde a soma destes quatro ângulos rectos?*

Alunos: *360°.*

Professora: *Quantas bolinhas já podemos pôr?*

Alunos: *Oito.*

Professora: *Quais são? (...vai marcando no geoplano do quadro os pontos à medida que os alunos indicam) e agora como é que faço?*

Alunos: *Fazemos bolinhas à volta da circunferência.*

Professora: *Quantas? Como faço?*

Aluno: *Duas. Temos de contar o espaço que vai de uma para outra.*

Professora: *Quantas bolinhas há entre estes dois pontinhos na circunferência mais pequena?*

Aluno: *Duas.*

Professora: *Estão todos à mesma distância?*

Alunos: *...Sim*

Professora: *Como vamos fazer, para as pôr lá? Olhem, este arco, este bocadinho de circunferência...estas duas bolinhas...dividem o arco (refere-se ao arco de 90° do 1º quadrante) em quantas partes.?*

Alunos: *Duas...quatro.*

Professora: *Duas? Olhem peguem numa régua e tentem traçar na circunferência mais pequena do vosso geoplano os dois raios, ...então...?...olhem daqui aqui, daqui aqui e dali a li, quantos são?*

Aluno: *Três.*

Professora: *(Aponta os arcos no geoplano do quadro e ao mesmo tempo diz) Um, dois, três ou não? Vocês disseram que estavam aqui duas bolinhas.... Estas bolinhas em quantas partes iguais dividem o arco?*

Alunos: *Três.*

Professora: *Este bocadinho de circunferência é o mesmo que este e o mesmo que este (manipula o compasso para mostrar). Temos agora que fazer o mesmo para ali. Como vamos fazer?*

Aluno: *Dividir o espaço...agora faz igual na outra parte da circunferência.*

Professora: *(Vai marcando os pontos na circunferência menor do geoplano do quadro) Quantas bolinhas já temos?*

Alunos: *Quatro*

Professora: *Quatro? Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete. Faltam-nos pôr mais, quantas é que faltam pôr mais?*

Aluno: *São quatro em cada semi-círculo.*

Professora: *Pronto, já está e agora falta-nos a circunferência maior, como é vamos fazer?*

Aluno: *Podemos fazer na mesma...*

Professora: *Se calhar não é preciso, já temos alguma coisa*

Aluno: *Medimos quantos centímetros tem*

Aluno: *Fazer outra vez na diagonal*

Professora: *(Constrói os diâmetros inclinados da circunferência maior feitos a partir dos pontos da circunferência menor). Vamos lá contar agora os pontos da circunferência maior.*

Alunos: *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.*

Professora: *É natural que fosse, são as mesmas que as de baixo. Já contaram as bolinhas da circunferência maior?*

Aluno: *São cinco.*

Professora: *São cinco? Aqui à volta?*

Aluno: *Em cada? Em toda?...ao todo vinte e quatro.*

Professora: *Ao todo vinte e quatro ...então o que é que lhe falta?*

Alunos: *Falta as do meio....*

Professora: *Entre esta e esta, há uma pinta ou não?*

Alunos: *Sim.*

Professora: *Então como é que as vamos pôr?*

Alunos: *Dividir os espaços ao meio.*

Professora: *Como medimos? Por tentativa (com o compasso)? Será que é isto?*

Alunos: *Sim.*

Professora: *Daqui até aqui, qual é a amplitude deste ângulo?*

Alunos: *90°*

Professora: *Então, cada um destes três ângulos, quanto medirá?*

Alunos: *Menos que 90°.*

Aluno: *É 45°.*

Professora: *45+45 quanto dá? Pode ser 45°?*

Alunos: *Não*

Aluno: *É 30°.*

Alunos *30+30+30 quanto é?*

Alunos: *90°*

Professora: *Cada um destes ângulos mede 30°. Vou desenhar um ângulo de 30° (desenha usando os pontos da circunferência menor do geoplano). Pode ser este? É este de 30°?*

Alunos: *Sim.*

Professora: *E este ângulo mais comprido (prelonga os lados do ângulo já identificado pelos alunos até as suas extremidades encontrarem a circunferência maior do geoplano)?*

Alunos: *Também é de 30°.*

Professora: *Porquê?*

Alunos: (confusão...em côro) *Têm a mesma amplitude.*

Professora: *Um ângulo de 60°, quem vem aqui desenhar?*

Aluno: *Eu...60°?*

Professora: *Concordam? E este ângulo que vou desenhar? Quanto é que mede?*

Alunos: *60°*

A professora na sala de aula vai desenhar em cartolina uma réplica da figura geométrica que entretanto construiu no geoplano do quadro, usando para isso papel vegetal e cartolina, pois precisa disso para o jogo que se vai seguir. Entretanto pergunta à turma:

Professora: *Quantos lados tem esta figura?*

Alunos: *Quatro.*

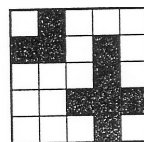
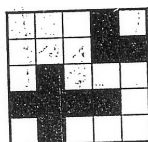
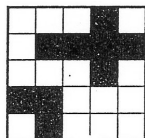
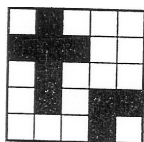
Professora: *E quantos vértices? Vamos lá contá-los.*

Alunos: *Um, dois, três, quatro.*

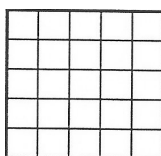
Vai agora ser feito então um jogo envolvendo toda a turma, mas só dois alunos previamente escolhidos são os principais intervenientes. A professora é a moderadora e o resto da turma pensa mentalmente os movimentos que vão ser descritos, também os executa nos seus geoplanos (com a ajuda dum pionês e da placa de esferovite) e avalia as execuções e instruções dos alunos intervenientes. Um dos dois alunos escolhidos, dá então as instruções ao outro para rodar a figura recortada e este no quadro, movimenta a cartolina segundo as instruções recebidas. Depois o aluno que está ao quadro, põem a cartolina em diferentes posições e pede ao colega que identifique as rotações que levam a figura de umas posições a outras (o jogo pode ser repetido as vezes que a Professora achar conveniente, escolhendo diferentes pares de alunos). Finalmente é dada a cada aluno a seguinte folha de tarefas:

FOLHA DE TAREFAS

1 - Identifica a rotação que transforma cada desenho no desenho seguinte (se preferires podes usar papel vegetal).



2 - Inventa uma rotação ao teu último desenho, representa o resultado da rotação na grelha que aqui te deixo e pede ao teu colega de carteira que descubra a rotação que inventaste.



(Kroner, 1994).

Os alunos lêem a primeira questão da folha de tarefas e resolvem-na em grande grupo, com o apoio da professora.

Trabalho de casa

Os alunos acabam em casa última tarefa começada na sala de aula.

4ª Sessão “As ventoinhas”

Principais objectivos

- Explorar a rotação em torno de um ponto.

Materiais

- Pionês, placas de esferovite, transparências cada uma delas com uma figura geométrica colada, feita de cartolina de uma de várias cores (triângulo rectângulo que foi designado por Tarta), compasso, folhas com geoplano circular, uma folha de tarefas.

Objectivos específicos

- Reconhecer rotações.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial por intermédio de: análise de figuras, construção de figuras; envolvimento de capacidades espaciais como por exemplo a coordenação visual-motora.
- Desenvolver o conceito de rodar em torno de um ponto; identificar correctamente os elementos que caracterizam uma rotação.
- Desenvolver conceitos de: lateralidade, ângulo.
- Exercitar uma leitura “fina “ dum texto escrito.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora distribui os alunos em grupos de dois e dá a cada grupo um pionês, uma placa de esferovite, várias folhas de transparências tendo cada uma das quais um Tarta colado (de uma de várias cores) e uma folha de tarefas (a seguir descrita) a cada aluno do grupo. Depois de ler para a turma a primeira tarefa pedida e dar as informações achadas convenientes, a professora pede aos alunos que leiam com atenção a folha de tarefas, executem e respondam por escrito na dita folha ao que lá é pedido. A professora vai percorrendo os grupos, quando solicitada ou quando acha necessária a intervenção. Ao fim de cada construção, o responder às questões da folha de tarefas é feito primeiro por toda a turma oralmente e orientada pela professora, e só depois é que cada aluno escreve a resposta na sua folha de tarefas.

FOLHA DE TAREFAS

Constrói com a ajuda desses triângulos de cores diferentes que estão colados em transparências e a cada um dos quais vamos chamar Tarta:

1) Uma ventoinha como esta que está na figura em baixo.



(Podes pôr a tua ventoinha sobre uma placa de esferovite e prendê-la com um pionês)

O Tarta está a rodar em torno de que ponto? _____

De quanto está a rodar? _____

Em que sentido? _____

2) Uma outra ventoinha com oito pontas.

(Podes pôr a tua ventoinha sobre uma placa de esferovite e prendê-la com um pionês)

O Tarta está a rodar em torno de que ponto? _____

De quanto está a rodar? _____

Em que sentido? _____

3) Uma ventoinha com seis pontas.

(Podes pôr a tua ventoinha sobre uma placa de esferovite e prendê-la com um pionês)

O Tarta está a rodar em torno de que ponto? _____

De quanto está a rodar? _____

Em que sentido? _____

4) Esta vela de moinho:



(Podes pôr a tua vela de moinho sobre uma placa de esferovite e prendê-la com um pionês)

O Tarta está a rodar em torno de que ponto? _____

De quanto está a rodar? _____

Em que sentido? _____

Trabalho de casa

Fazer uma ventoinha ou um cata-vento em papel de lustro ao gosto de cada aluno, para ser colocado no cartaz das transformações.

Nota:

Os alunos não tiveram dificuldades em construir a ventoinha de 4 pontas ou a vela de moinho com 4 velas, contudo grandes dificuldades foram percebidas pela professora, quando eles construíram as ventoinhas de oito pontas e de seis pontas.

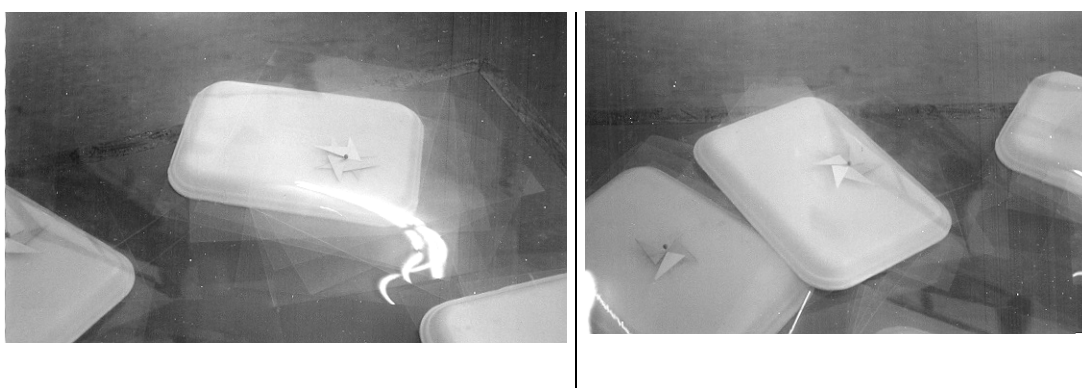


Fig. C.5. Ventoinhas construídas pelos alunos.

A professora considerou importante, antes de passar à sessão seguinte do ambiente de ensino trabalhar um pouco mais o ângulo, com a turma. Assim no dia seguinte, após a professora ter perguntado quem tinha feito o trabalho de casa e os meninos terem colocado sobre uma mesa da sala de aula as suas ventoinhas, a professora teve uma conversa com os alunos sobre como o Tarta (triângulo) rodava para dar cada uma das ventoinhas. Grande discussão acerca dos ângulos então se gerou na turma e a professora representou para a turma, usando o compasso grande da sala de aula, ângulos de diferentes tamanhos. Depois a professora distribuiu a cada menino uma folha com um geoplano circular e pediu-lhes que cada um, individualmente, desenhasse usando o seu geoplano circular, os ângulos pela seguinte ordem: 90° , 45° , 60° , 30° e 120° . Sempre que um ângulo era representado por todos os alunos, um aluno voluntariamente ia depois representar esse mesmo ângulo no geoplano de quadro e, justificava à turma o seu desenho. Um exemplo da execução desta tarefa feita por um aluno, vai ser representado na figura C.6:

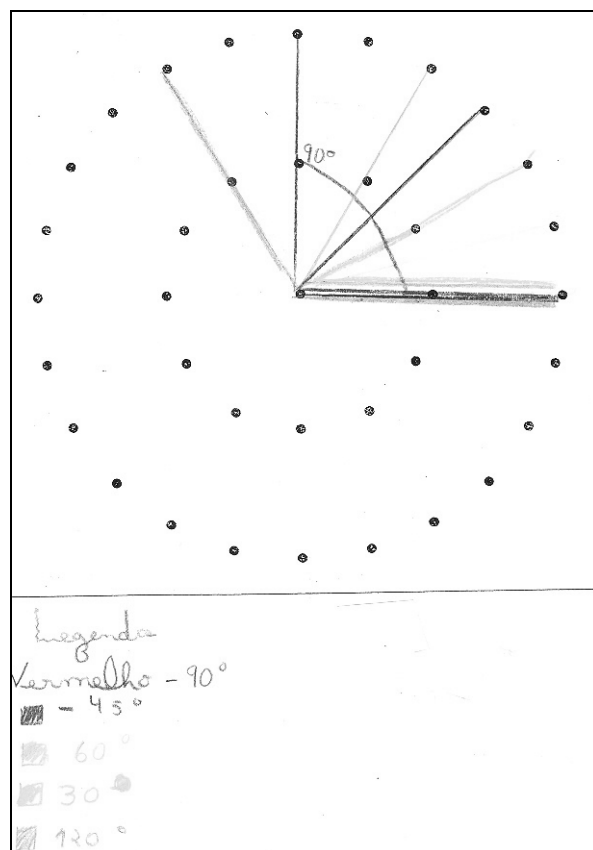


Fig. C.6. Trabalho de representação dos ângulos feito por um aluno.

5ª Sessão “A simetria rotacional”

Principais objectivos

- Relacionar o movimento de rotação em torno de um ponto com a simetria rotacional.
- Explorar se uma figura tem simetria rotacional.

Materiais

Folha de tarefas, folha com geoplano circular, papel vegetal, lápis de cores, placa de esferovite e pionês.

Objectivos específicos

- . Desenvolver o pensamento visual-espacial.
- . Reconhecer simetria rotacional e criar simetria rotacional.
- . Desenvolver a capacidade de pensar logicamente.
- . Exercitar uma leitura “fina “ dum texto escrito.
- . Aprender a responder com precisão às instruções.
- . Desenvolver a criatividade e fazer a ligação da arte com a geometria.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

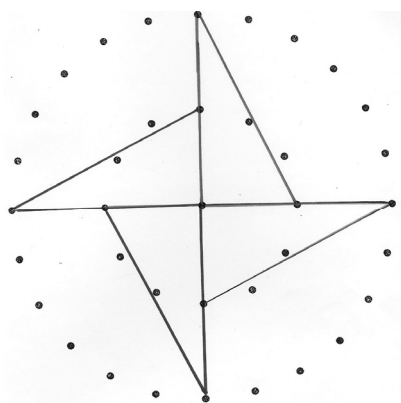
A professora distribui a cada grupo de dois alunos: duas folhas com um geoplano circular; papel vegetal; uma placa de esferovite, um pionês e a cada aluno a folha de tarefas a seguir descrita. A professora pede a cada aluno que olhe com atenção para o desenho que está na folha de tarefas, que já é conhecido, e perguntando-lhes o que está lá representado, falam da ventoinha e como ela é o resultado da rotação de um triângulo em torno dum certo ponto. Estabeleceu-se uma discussão com a turma para melhorar o vocabulário relativo ao movimento rodar e amplitude do ângulo. Depois os alunos são convidados e lerem em voz alta a folha de tarefas, a decalcar a ventoinha em papel vegetal e a começar a realizar a 1ª tarefa que lhes foi proposta. Falam de figuras com simetria rotacional e vão identificar no cartaz da sala de aula, figuras com esse tipo de simetria. Os alunos retomam a leitura em voz alta da folha de tarefas relativa 2ª tarefa e a professora assinala-lhes os pontos principais da tarefa. A mesma estratégia para a 3ª tarefa.

FOLHA DE TAREFAS

Repara no desenho desta folha. O que vês? Um geoplano circular e lá uma figura que é uma ventoinha e podemos dizer que aquela figura tem simetria rotacional porque tem uma propriedade notável “ **se rodarmos a figura de menos de uma volta completa em torno do seu centro, a figura obtida coincide com a inicial (parece que não se mexeu)**”

1- Decalca a ventoinha em papel vegetal e verifica o que acabei de dizer.

De quanto rodas? _____



2- Desenha esta figura no teu geoplano circular de papel. Começa por traçar um dos triângulos; para isso traça um raio da circunferência maior e um raio conveniente da circunferência menor (isto é , neste caso perpendicular ao raio da circunferência maior), mas que não estejam na mesma linha. Depois une os extremos desses dois raios, ficando construído esse triângulo. Repete o que fizeste anteriormente tantas as vezes quantas as necessárias, até desenhares a ventoinha.

3- Inventa agora uma figura nova na outra folha com o geoplano circular que te foi dada, mas com o mesmo tipo de simetria (simetria rotacional). Não te esqueças que para traçar cada um dos triângulos tens de traçar um raio na circunferência maior e um outro raio na circunferência menor e unir as extremidades desses raios. Depois repete o que fizeste tantas as vezes quantas as necessárias.

A professora vai clarificando diferentes aspectos geométricos, quer para a turma, quer para os grupos, à medida que os percorre, ou quando solicitada ou se acha necessária a intervenção.

Fundamentalmente com a orientação da professora os alunos construíram figuras parecidas com ventoinhas, as quais foram posteriormente (trabalho de casa) coloridas para serem coladas no cartaz da sala de aula sobre “transformações” (ver figura C.7).



Fig. C.7. Figuras parecidas com ventoinhas feitas pelos alunos.

6ª Sessão “A reflexão”

Principais objectivos

- Relacionar os conceitos de simetria rotacional e de simetria de reflexão.
- Explorar a simetria de reflexão.
- Explorar a reflexão

Materiais

Folhas de trabalho (letras, puzzle, figuras); espelhos; papel vegetal; cartões de figuras, giz de cor.

Objectivos específicos

- . Desenvolver os conceitos de simetria de reflexão, linha de simetria e linha de reflexão.
- . Reconhecer, localizar e criar linhas de simetria.
- . Reconhecer e localizar linhas de reflexão.
- . Explorar a imagem dada por reflexão.
- . Desenvolver o pensamento visual-espacial.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora distribui a cada par de alunos uma folha de papel vegetal e a seguinte folha com as letras maiúsculas do alfabeto.



Depois a professora dirige-se a toda a turma, mostra a letra **Z** (feita em papel vulgar e em papel vegetal) sobrepõe esta folha naquela, imprime um movimento e pergunta: *O que é que estou a fazer?*

Alunos (em coro): *a rodar uma volta no sentido...a rodar meia volta no sentido dos ponteiros do relógio.*

Professora: *O que é que aconteceu?*

Aluno: *Ficou no mesmo lugar.*

Alunos (em coro): *Parece que não se mexeu.*

Professora: *Então rodei quanto?*

Alunos (em coro): *Meia volta.*

Professora: *Então agora vão olhar aí para a vossa folhinha e têm aí várias letras maiúsculas. Quero que vocês me descubram quais são aquelas que rodando meia volta ou menos que uma volta completa, parece que não se mexeram?*

Aluno: *O E.*

Aluno: *O X.*

Professora: *Vamos ser organizados, vamos começar na primeira linha. Na primeira linha quais são?*

Alunos: *O A.*

Professora: *ai é?... Então experimentem lá...vamos todos experimentar com lápis, papel vegetal e folha de actividade. ...Tem quer meia volta ou menos de uma volta.*

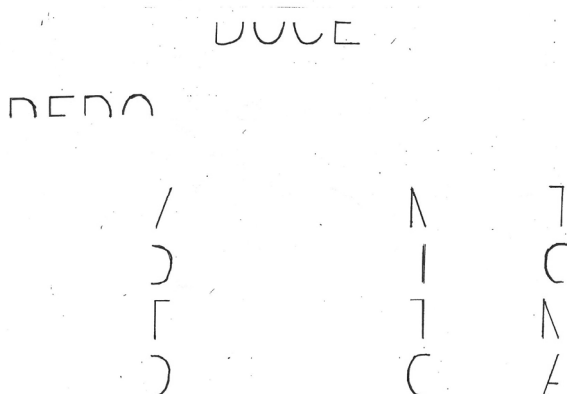
Alunos: *O A não é. O E é, o O...*

De seguida a professora pede aos alunos para tornarem a olhar para o conjunto das letras e para as classificarem segundo: aquelas que podem ser dobradas ao meio (uma metade é a imagem dada pelo espelho da outra metade); as letras que podem ser cortadas em metades de mais que uma maneira; as letras que podem ser cortadas em 2 metades de mais que duas maneiras. A professora vai colocando no quadro a classificação das letras feitas pelos alunos, destacando a cores as respectivas linhas de simetria e introduz em grande grupo e de forma intuitiva, o conceito de linha de simetria de figuras geométricas. A professora pergunta por uma outra maneira de procurar a linha de simetria numa figura, diferente de dobragens. A professora em forma de resumo conversa com a turma sobre as letras do alfabeto dando ênfase aos conceitos de simetria rotacional e simetria de reflexão.

A professora dá agora aos grupos de dois alunos um espelho e as seguintes folhas de trabalho: “para descobrir as palavras secretas, das quais só se vê metade”, “onde pões o espelho de forma a fazeres um comboio ”? (Mira Math Activities for Elementary School, 1973)”, “onde pôr o espelho de forma que a bola vá cair no nariz do urso? (Mira Math Activities for Elementary School, 1973)”, “onde pôr o espelho de forma que os dois objectos sejam imagem um do outro? (Mira Math Activities for Elementary School, 1973)”.

FOLHAS DE TRABALHO

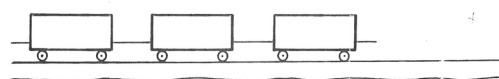
“Usa o espelho para descobrir as palavras secretas.” Desenha-as a lápis.



“Onde pões o espelho de forma a fazeres:

- . Um comboio grande?
- . Um comboio com quatro carruagens?
- . Um comboio só com uma carruagem?”

Traça com a ajuda do lápis as linhas de espelho.



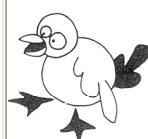
“Onde pões o espelho de forma que a bola vá cair no nariz do urso? “

Traça com a ajuda do lápis a linha de espelho.



“Onde pões o espelho de forma que para cada par de objectos, um seja imagem do outro? “

Traça com a ajuda do lápis as linhas de espelho.



A professora passa por todos os grupos e faz com que os grupos relacionem as imagens dadas pelo espelho com as imagens dadas por possíveis dobragens e que dêem ênfase às linhas de espelho e à forma, tamanho e localização dos objectos e das respectivas imagens. Finalmente é dada à turma uma grande quantidade de cartões de 4 tipos (ver figura C.8) e a professora convida-os para um jogo. Começa por construir com esses cartões uma figura que é simétrica em relação a uma linha. Cada aluno da turma vai tentar continuar a figura, colocando um novo cartão de forma que a construção continue a ser simétrica em relação à

mesma linha. Quando não o puder fazer, dá a sua vez a outro colega. Toda a turma arbitra o jogo.

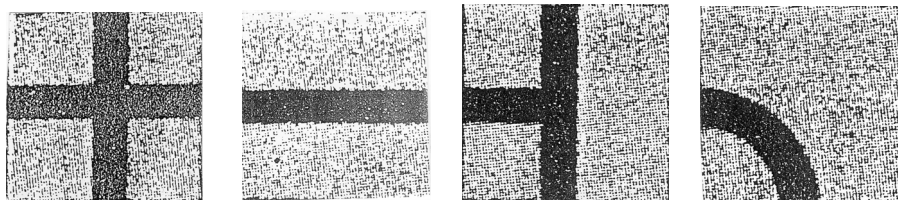
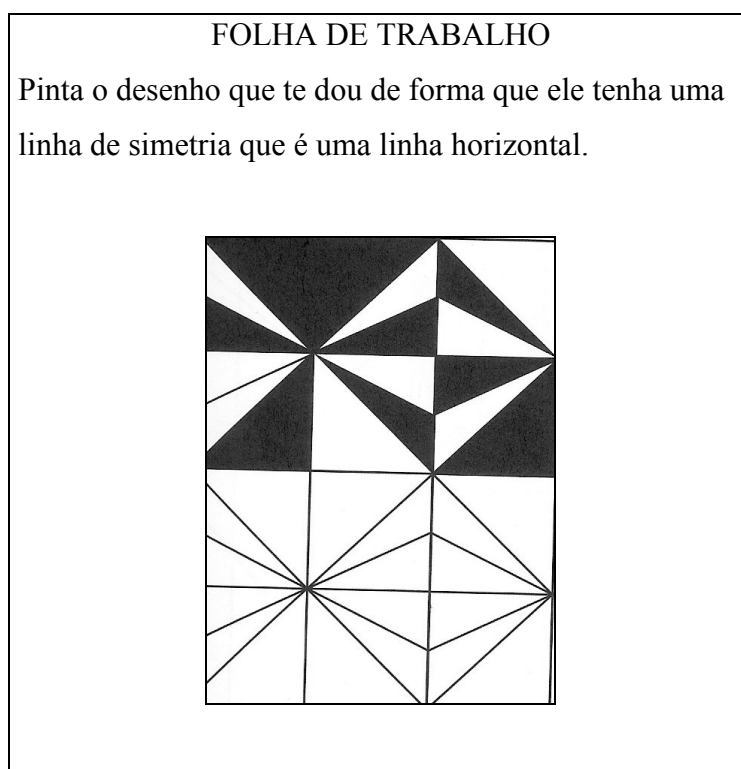


Fig. C.8. Cartões.

Trabalho de casa

Dar a cada aluno a seguinte folha de trabalho (Kroner, 1994).



7ª Sessão “O virar”

Principais objectivos

Explorar e descobrir o efeito da transformação-reflexão (movimento virar).

Materiais

Figuras do “cartaz das Transformações”, giz de cores, placa com um oito, folha de trabalho.

Objectivos específicos

- Relembrar as características do movimento rodar, amplitudes de ângulos, conceito de simetria rotacional, simetria de reflexão, linha de simetria, linha vertical e linha horizontal.
- Explorar a imagem dada por reflexão e o movimento virar.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

No princípio da sessão, a professora convida a turma a fazer um resumo oral do que tem sido aprendido nas sessões anteriores e que esteve fundamentalmente relacionado com o movimento rodar. Dirigem-se ao "cartaz das Transformações geométricas", que está agora enriquecido com todos os desenhos feitos pelos alunos nas sessões anteriores. Os alunos individualmente mostram à turma figuras no cartaz, que se relacionam com o movimento rodar, caracterizando o respectivo movimento, figuras que tenham simetria rotacional, figuras que tenham linhas de simetria (se dobrarmos a figura em torno dessa linha, uma parte coincide exactamente com a outra), identificando no cartaz as respectivas linhas de simetria. A professora vai pondo questões aos alunos de forma a melhorar e clarificar a linguagem e a reconstituir (combinar) os conhecimentos aprendidos.

A turma é agora convidada a fazer um jogo (Dienes e Golding, 1982) para o qual, a professora já tinha desenhado no chão da sala de aula um grande oito, com os dois eixos de simetria traçados: um eixo longitudinal, *vermelho* e o outro eixo transversal *verde*. O oito fica então dividido em quatro secções, constituindo cada uma o campo de um jogador, o que fica bem determinado com a inscrição do nome do titular desse campo. No centro do oito, coloca-se o condutor do jogo (a professora) que segura uma réplica do oito em cartolina, figura C.9.

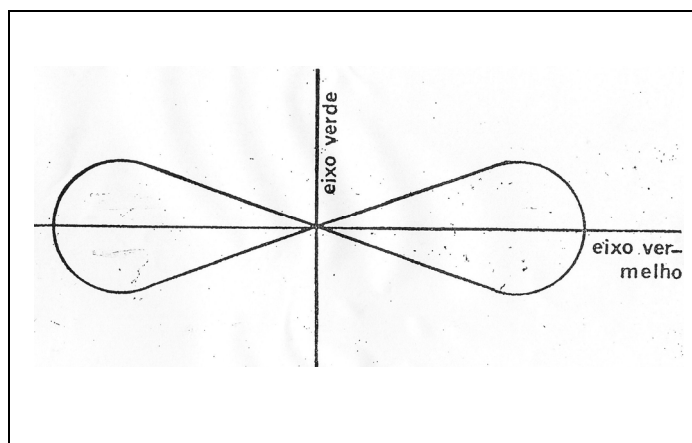


Fig. C.9. Réplica do oito em cartolina.

A réplica também está dividida em quatro campos e traz também os eixos de simetria, mas não estão coloridos. A réplica está marcada nas duas faces e, no começo do jogo o condutor mantém a placa na mesma posição que o desenho do chão. Todos os jogadores devem saber isso e podem verificá-lo pessoalmente.

O condutor anuncia que vai segurar a placa pelas duas extremidades, um dos eixos de simetria e que a vai virar. Executa lentamente o movimento e os demais jogadores têm o direito de pôr o dedo sobre a parte da placa correspondente ao seu campo e de seguir o movimento. Os jogadores mudam de lugar de acordo com a situação da placa virada. Experimenta-se de novo até que todos tenham compreendido bem. Regressa tudo à situação inicial.

O condutor (professora) começa a questionar a turma:

"vou virar vermelho" onde vão vocês estar, quando eu tiver terminado? (enquanto diz isto, segura a placa pelo eixo vermelho e vira-a, e põe a placa no centro do oito, pede para todos verem o que ele está a fazer. Os jogadores devem então deslocar-se para a nova posição.

- Como devo virar a placa, para vos levar de volta para casa só com um movimento?

- Vou virar a placa e quero que quando a tiver virado "fulano" deva estar no lugar de "sicrano". De que maneira é necessário que a vire? Será em torno da linha vermelha ou em torno da linha verde?

- Aonde vou com uma viragem verde seguida de uma viragem vermelha?

- Aonde vou com uma viragem vermelha seguida de uma viragem verde?

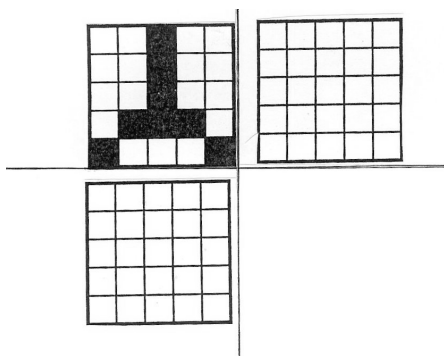
- Que tipo de movimento, após este último movimento me vai conduzir à posição do início do jogo e com um só movimento?

(Para cada questão, após a respectiva resposta, era verificada a respectiva correcção pela turma; alunos e condutor do jogo davam a vez aos outros meninos por forma que toda a turma entrasse no jogo; a professora ajudava quando necessário os alunos a formularem as respectivas questões).

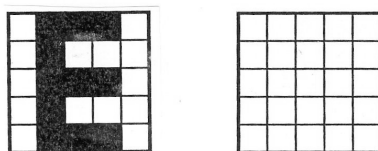
Depois, a cada aluno foi dada a seguinte folha de trabalho (Kroner, 1994) e a professora vai percorrendo todos os alunos individualmente, quer solicitada quer não.

FOLHA DE TRABALHO

1 - Imagina que viras o desenho com a letra T que a seguir te mostro, em torno da linha horizontal e também em torno da linha vertical (essas linhas estão traçadas na tua folha). Sombreia as grelhas que te dou, com cores diferentes, para mostrar os resultados dessas tuas viragens.



2 - O desenho da letra E que está na grelha em baixo à tua esquerda, tem alguma linha de simetria (linha de espelho)? Se sim, traça-a.



Agora imagina virar este desenho em torno dessa linha de simetria e sombreia a grelha que está ao lado, para mostrar o resultado dessa viragem.

Trabalho de casa

Acabar a folha de trabalho começada nesta sessão.

8ª Sessão “simetrias”

Principais objectivos

Explorar e descobrir o efeito da transformação reflexão (movimento virar).

Materiais

Peças em cartão todas iguais, espelhos, folha de tarefas, folhas A4 em branco, régua, lápis e folha de papel vegetal

Objectivos específicos

- Criar e reconhecer reflexões.
- Reconhecer figuras com simetria rotacional e figuras com simetria de reflexão (com linhas de simetria).
- Desenvolver o conceito de virar em torno de uma linha; identificar os elementos que caracterizam uma reflexão.
- Desenvolver os conceitos de linha vertical, horizontal, ângulo, rectas perpendiculares, rotação e padrão.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial.
- Exercitar uma leitura “fina” dum texto escrito e fomentar a discussão matemática.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora distribui a cada par de alunos um espelho, e a folha de tarefas que vai ser descrita. A professora pede então aos alunos que leiam bem a primeira tarefa. Depois lê em voz alta para a turma essa mesma tarefa e simultaneamente vai distribuindo pelos pares de alunos as peças de cartão. A professora ajuda a turma em grande grupo, a responder às questões da primeira tarefa, clarificando os conceitos de simetria e corrigindo qualquer mal entendido ou ajudando a usar o espelho. Depois cada grupo vai prosseguir a execução das restantes tarefas da folha de trabalhos, orientado pela professora e, à medida que os azulejos vão sendo construídos, os alunos vão-nos comparando e discutindo as razões das diferenças. A professora vai ainda percorrendo os grupos, quando solicitada ou quando acha necessária a intervenção.

FOLHA DE TAREFAS

1- Repara bem na peça que te dou:



- A peça tem alguma linha de simetria? (*Podes pôr o espelho em algum sítio na peça, de forma que o espelho dá uma metade dessa figura?*)

- A peça tem simetria rotacional? (*Podes rodar de algum modo a peça de menos de uma volta completa em torno do seu centro e a peça parece que não se mexeu?*)

2 – Vira a peça na horizontal (em torno dum dos seus lados horizontais) e mostra com uma outra peça como aquela fica depois de virada (se precisares podes usar o espelho). Repara na figura que obtiveste, vira agora esta nova figura (resultante de teres junto as duas peças anteriores) em torno dum dos seus lados verticais. (Se precisares podes usar o espelho.) Fizeste um azulejo. Compara-o com os dos teus colegas.

3 – Divide a folha A4 que te dou, em 4 partes, para isso traça nessa folha duas rectas perpendiculares às quais vais chamar a e b . Numa das partes constrói um azulejo a teu gosto com quatro das tuas peças. Esse azulejo tem simetria rotacional? _____. Tem alguma linha de simetria? _____. Verifica com o espelho. Se uma das linhas traçadas, por exemplo a linha a fosse uma linha de espelho, o que verias? Constrói o que vês usando peças. Se a outra linha b também fosse uma linha de espelho, constrói com peças o que verias agora, olhando a linha de espelho.

4 – Considera os dois azulejos de “cima” que já tens construído da tarefa anterior e desfaz o azulejo de baixo. Agora no azulejo da direita vais rodar só uma das peças de um quarto de volta em torno do seu centro. Ficas com um azulejo diferente, de 4 peças. Agora vais juntar lado a lado com cuidado, os dois azulejos de 4 peças (o antigo e o que acabaste de fazer) e ficas com um “novo azulejo” formado agora por oito peças.

5 – Faz mais azulejos de oito peças exactamente iguais ao “novo azulejo”. Quando tiveres vários, junta-os de forma a fazer um padrão maior de azulejos. Este azulejo grande quantas peças tem? É um padrão? Tem simetria rotacional? Tem linhas de simetria?

Os alunos construíram como resposta à última tarefa, três tipos de azulejos, ver figura C.10.



Fig. C.10. Tipos de azulejos construídos pela *turma B*

9ª Sessão “O deslizar”

Principais objectivos

Explorar e descobrir o efeito da transformação translação.

Materiais

Folha de papel quadriculado com "o Tarta e o camião", folha de trabalho, folha de papel vegetal, régua.

Objectivos específicos

- Reconhecer translações.
- Desenvolver o conceito de deslizar numa dada direcção e os conceitos de linha vertical e linha horizontal.
- Identificar os elementos que caracterizam uma translação.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora começou por convidar os alunos a pensarem no movimento que tinham feito na sessão anterior para juntar os azulejos iguais por forma a construírem um azulejo maior e as palavras “arrastar” e “deslizar” foram então proferidas na turma. A professora pediu então aos alunos para olharem para o "escorrega" que está no "cartaz das Transformações Geométricas" da sala de aula e disse-lhes: *imaginem que o escorrega é maior e queríamos desenhar o menino a descer, como o fazer?* (lembrou o decalque e o deslocar neste caso é deslizar; no deslizar, cada ponto se move segundo uma linha recta). Depois a professora referiu que o menino do escorrega está a sujeitar-se a uma transformação a *translação* e está a deslizar naquela direcção (aponta essa direcção). A professora perguntou aos alunos se já conheciam o termo translação (referente ao movimento de translação da terra) e se é a mesma coisa? A seguir a professora realçou: *“no escorrega o menino desce sempre na mesma direcção, não muda de posição e está sempre igualmente inclinado”*. De seguida os alunos identificaram no "cartaz das Transformações Geométricas" grupos de figuras relacionadas com translações e grupos de figuras não relacionadas com translações (figuras rodadas, figuras simétricas, etc). A professora estabeleceu um diálogo com os alunos para que fossem observadas as diferenças entre uns casos e os outros.

Depois foi dado a cada aluno a seguinte folha de papel quadriculado com um camião e um triângulo, ao qual foi dado o nome de Tarta, ver figura C.11.

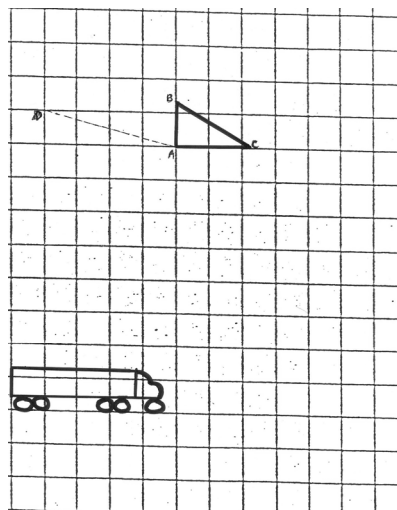


Fig. C.11. Folha quadriculada com um camião e um triângulo

Os alunos deslocaram o Tarta e o camião segundo a translação de uma figura no seu próprio plano (empurrar simplesmente uma figura de uma posição a outra sem a rodar e ao mesmo tempo, cada ponto se move segundo uma linha recta) e segundo as regras que a professora ditou uma por uma, para toda a turma:

Faz deslizar o Tarta, na horizontal, quatro quadrículas para a direita. Depois faz deslizar o último Tarta cinco quadrículas na vertical para baixo. Faz deslizar na horizontal o último Tarta cinco quadrículas para a esquerda.

Como tenho de fazer deslizar o último Tarta de modo que ele vá para a posição donde partiu?

Se o Tarta desliza da primeira posição de tal maneira que o seu ponto A vai parar ao ponto D, para onde vai o Tarta depois desse movimento? Desenha-o.

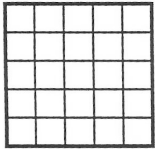
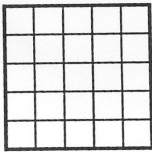
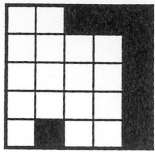
Faz deslizar o camião na horizontal seis quadrículas para a direita. (Os alunos podem usar régua e/ou papel vegetal como apoio e devem deixar a lápis os desenhos das diferentes imagens do Tarta e/ou do camião, após as translações). A professora para cada questão apoiou as respostas de cada aluno individualmente e qualquer questão só foi resolvida, depois de todos os alunos da turma terem respondido adequadamente às questões anteriores.

Trabalho de casa

Executar as tarefas da folha de trabalho (Kroner, 1994).

FOLHA DE TRABALHO

Usa as grelhas abaixo e sombreia-as a cores diferentes para mostrares o resultado de imaginares o deslizar da tua figura na direcção horizontal (a verde) e na direcção vertical (a azul).



10ª Sessão “O jogo da transformação”

Principais objectivos

Explorar conjuntamente os movimentos: virar, deslizar e rodar.

Materiais

- Quadro de quadrados, tendo em muitos desses quadrados um papagaio desenhado e quatro peças quadrangulares com um papagaio desenhado em cada uma delas, mas de cores diferentes, figura C.12.

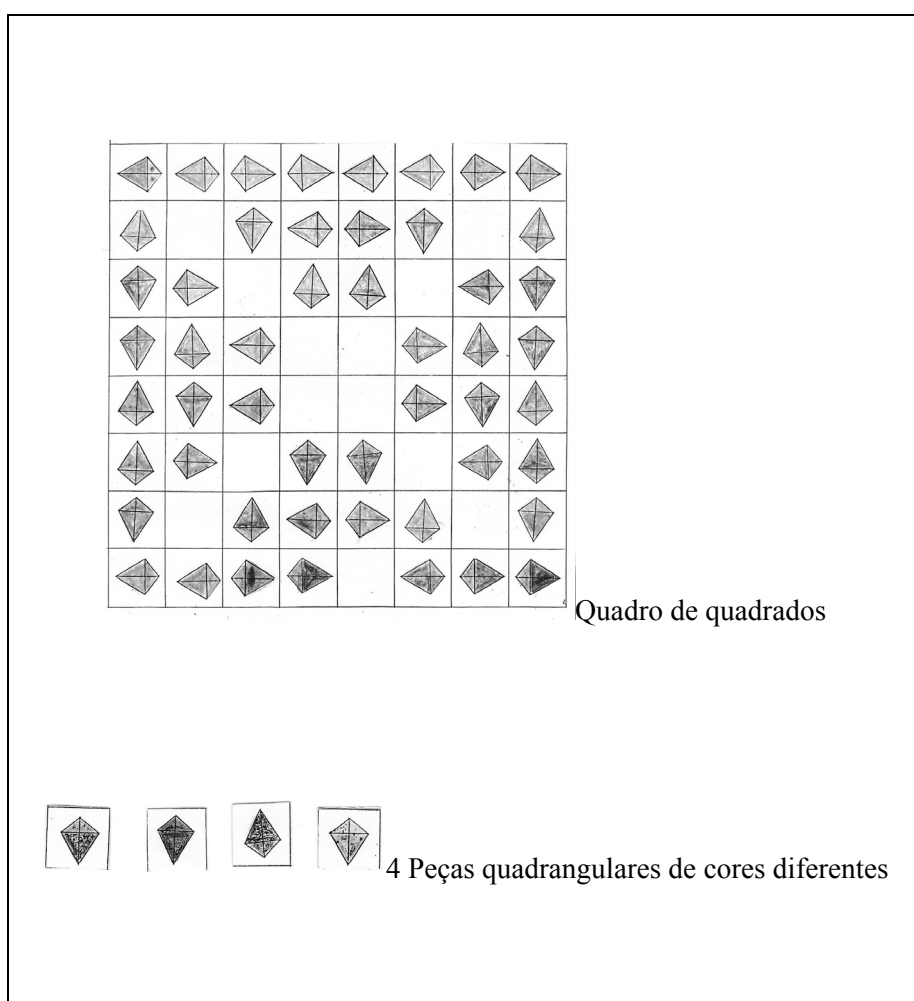


Fig. C.12. Quadro de quadrados e 4 peças quadrangulares.

- Baralho de trinta cartões com instruções escritas, ver Quadro C.1
- Uma folha de trabalho.

Quadro C.1. Cartões com instruções escritas.

Cartões com instruções escritas		
DESLIZA	DESLIZA e RODA	DESLIZA e RODA
VIRA, DESLIZA e RODA	RODA, DESLIZA e VIRA	DESLIZA, RODA e VIRA
VIRA, DESLIZA e RODA	RODA, DESLIZA e VIRA	DESLIZA, RODA e VIRA
RODA, VIRA e DESLIZA	DESLIZA, VIRA e RODA	VIRA, RODA e DESLIZA
RODA, VIRA e DESLIZA	DESLIZA, VIRA e RODA	VIRA, RODA e DESLIZA
VIRA	VIRA e RODA	RODA e VIRA
VIRA	VIRA e RODA	RODA e VIRA
RODA	VIRA e DESLIZA	DESLIZA E VIRA
RODA	VIRA e DESLIZA	DESLIZA E VIRA
DESLIZA	RODA e DESLIZA	RODA e DESLIZA

Objectivos específicos

- Desenvolver os conceitos de reflexão, translação e rotação, através dos movimentos virar, deslizar e rodar respectivamente.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial.
- Contribuir para a aprendizagem entre colegas numa situação competitiva e amigável.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora convidou os alunos a repartirem-se em grupos de quatro, para participarem num jogo, o *Jogo da Transformação* e, forneceu a cada grupo um quadro de quadrados, tendo em muitos desses quadrados um papagaio desenhado; um baralho de cartões com instruções;

quatro peças quadrangulares com um papagaio desenhado em cada uma delas, mas de cores diferentes.

Foi pedido a um aluno que lesse em voz alta para a turma, a descrição do Jogo da Transformação, ver Quadro C.2 e simultaneamente a professora clarificou com mais pormenor, essa mesma descrição.

Quadro C.2. Descrição do jogo da transformação.

<p>Jogo da transformação (adaptado de Sicklick, Turkel e Curcio, 1988).</p> <p><i>Material</i></p> <ul style="list-style-type: none">- Um quadro de quadrados, tendo em muitos desses quadrados um papagaio desenhado;- Um baralho de trinta cartões, com instruções escritas;- Quatro peças quadrangulares com um papagaio desenhado em cada uma delas, mas de cores diferentes. <p><i>Descrição</i></p> <p>O jogo começa com cada jogador (2 ou 4) posicionando uma das peças quadrangulares num dos cantos do quadro. O objectivo do jogo é mover aquela peça até ao canto diagonalmente oposto, mas posicionada de forma apropriada, segundo as instruções do baralho de cartões, previamente baralhado. O vencedor é o primeiro jogador que atinge esse objectivo. Na sua vez, o jogador tira um cartão do baralho, segue as instruções e coloca o cartão virado, noutra pilha. As instruções que estão nos cartões são: desliza, roda e vira e combinações destas. Os movimentos estão definidos da seguinte maneira:</p> <p><i>Deslizar</i> - movimento que move cada ponto do quadrado a uma dada distância (comprimento do lado do quadrado) e numa dada direcção (vertical ou horizontal). São possíveis quatro movimentos.</p> <p><i>Rodar</i> - movimento em torno do centro do quadrado, de 90°, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio. Neste movimento, a peça mudará de orientação mas, permanecerá no mesmo lugar.</p> <p><i>Virar</i> - movimento que reflecte cada ponto do quadrado, em torno de uma linha que é um lado do quadrado. Há quatro movimentos possíveis.</p> <p>Nos vários movimentos, só a posição final é significativa para verificar se o movimento se pode fazer (a peça em jogo deve sempre coincidir com as figuras que estão nos quadrados do quadro, excepto se não estiver lá figura nenhuma). Os passos intermediários nos diferentes cartões não precisam de coincidir com as figuras dos quadrados do quadro, mas todos os movimentos devem ser feitos pela ordem por que aparecem nos cartões. Quando o jogador não pode seguir estas regras, perde a vez.</p>

Depois pediu aos alunos para estarem atentos à breve demonstração de como o jogo é jogado e que foi feita pela professora e a pela investigadora. Referiu ainda que todos os meninos que tivessem dúvidas sobre o jogo, deveriam dizer-las. Depois de terminada a demonstração do jogo e clarificadas todas as dúvidas sobre o mesmo, os alunos começaram por tirar à sorte (utilizaram um dado) a sua vez e, iniciaram o *Jogo da Transformação*.

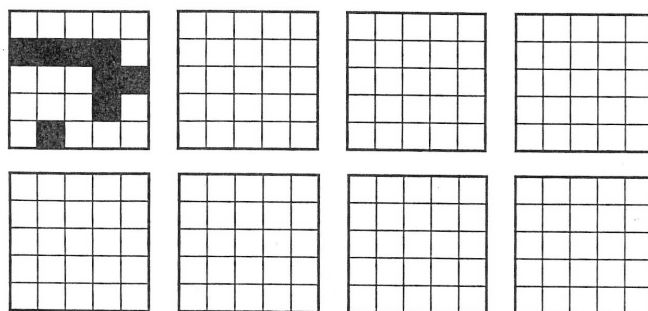
À medida que acabavam o jogo, os alunos individualmente foram sombrear grelhas dadas na seguinte folha de trabalho, para mostrar os resultados de imaginar fazer deslizar, virar e rodar uma figura (Kroner, 1994).

FOLHA DE TRABALHO

Repara no desenho que está na grelha do canto superior esquerdo. Imagina que o movimentas mentalmente de acordo com as instruções da tabela abaixo. Regista o que pensaste fazendo o desenho correspondente ao que tu pensaste nas grelhas que te apresentamos e seguindo as instruções e as setas que estão descritas na tabela.

instruções:

→	vira vertical →	desliza →	roda $\frac{1}{4}$ de volta no sentido dos ponteiros do relógio, em torno do centro da grelha.
↓	↓	↓	↓
vira horizontal	desliza	roda 90° no sentido dos ponteiros do relógio, em torno do centro da grelha	vira vertical



A Professora percorreu todos os grupos quer tivesse sido solicitada quer não.

Trabalho de casa

Acabar a folha de trabalho iniciada nesta sessão.

11ª Sessão “Pavimentar”

Principais objectivos

- Compreender as transformações, explorando os movimentos virar, deslizar e rodar.
- Estender e criar pavimentações (desenhos que cobrem uma superfície plana sem deixar espaços e sem sobreposições)

Materiais

Peça hexagonal de plástico branco; triângulos todos do mesmo tamanho feitos de cartolina de várias cores (a cada triângulo é dado o nome de Tarta); folhas de trabalho.


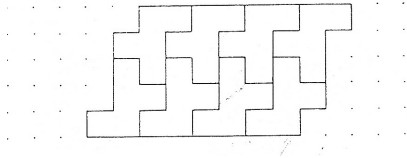


Objectivos específicos

- Reconhecer e criar simetria.
- Reconhecer padrões, reproduzir padrões, ver relações e fazer generalizações.
- Desenvolver o conceito de pavimentação.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial, exercitando a imagética e usando capacidades tais como: estruturação e coordenação.
- Estabelecer ligações entre a Geometria e a Arte.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora dividiu a sala em duas zonas as quais iriam estar relacionadas com as duas folhas de trabalho que cada aluno deveria executar. A professora disse à turma que para realizarem uma dessas folhas de trabalho iriam precisar de peças hexagonais de plástico, mas só havia cinco peças, então iria ser seguido o seguinte procedimento: cinco dos meninos iniciavam as tarefas da folha de trabalho que exigiam as tais peças hexagonais, enquanto os outros alunos faziam as tarefas da outra folha de trabalho que só exigiam papel e lápis. Quando os primeiros cinco alunos terminassem as respectivas tarefas, mudavam de zona de trabalho e iam iniciar as tarefas que exigiam papel e lápis. Também por troca outros cinco alunos iniciariam as tarefas que envolvem as peças hexagonais (mesmo deixando a tarefa que tinham em mãos se ainda não acabada, mas iriam retomá-la mal acabassem aquelas tarefas). Os restantes alunos prosseguiram as tarefas em mãos e mal fosse possível novas trocas se fariam, até que todos os meninos executassem a duas folhas de trabalho. A professora foi passando por cada aluno, intervindo quando solicitada ou quando achasse necessária a intervenção.

FOLHA DE TRABALHO - A	FOLHA DE TRABALHO – B
<p>Repara no que te dou:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Uma peça de plástico branco que tem a forma de hexágono - Alguns triângulos (vou chamar Tarta ao triângulo) de cores diferentes, todos do mesmo tamanho. <p>1. <u>Cobre a tua peça hexagonal com os Tartas</u> de forma a não deixares espaços entre eles. Os Tartas também não podem ficar uns em cima dos outros.</p> <p>2. Agora que já pavimentaste a tua peça com os Tartas, diz-me:</p> <ul style="list-style-type: none"> - O desenho que construístes tem simetria rotacional? _____ - O desenho tem simetria de reflexão? _____ <p>3. <u>Cobre outra vez a tua peça com os Tartas</u>, de forma a <u>construíres um outro desenho diferente</u> do primeiro que fizeste, e que tenha simetria rotacional ou tenha simetria de reflexão.</p>	<p>1 – Com esta unidade  tu podes construir diferentes pavimentações (desenhos que cobrem uma superfície plana sem deixar espaços e sem sobreposições). <u>Estende a pavimentação</u> que te mostro em baixo, seguindo o padrão já começado. Podes colorir.</p>  <p>2 – Tenta usar novamente a mesma unidade  e <u>constrói</u> no ponteadado em baixo, <u>uma pavimentação diferente</u> daquela que te mostrei no cimo desta folha.</p> 

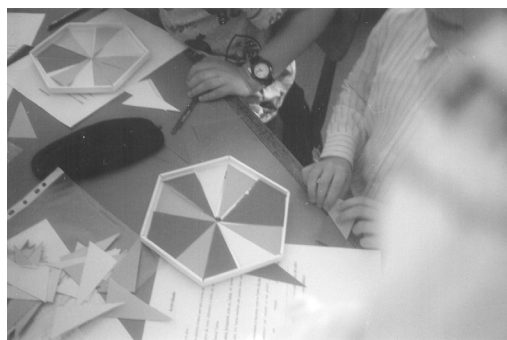

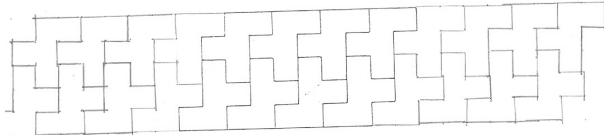



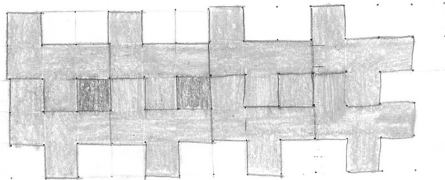
Fig. C.13. Peças hexagonais cobertas com Tartas.

Actividade


1- Com esta unidade  tu podes construir diferentes pavimentações (desenhos que cobrem uma superfície plana sem deixar espaços e sem sobreposições). Tentar estender a pavimentação que te mostro em baixo, mas seguindo o padrão que já foi começado. Podes colorir.

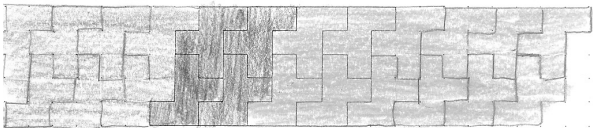



2- Tenta usar novamente a mesma unidade  e constroi no ponteadado em baixo, uma pavimentação diferente daquela que te mostrei no cimo da folha.



Actividade

1- Com esta unidade  tu podes construir diferentes pavimentações (desenhos que cobrem uma superfície plana sem deixar espaços e sem sobreposições). Tentar estender a pavimentação que te mostro em baixo, mas seguindo o padrão que já foi começado. Podes colorir.



2- Tenta usar novamente a mesma unidade  e constroi no ponteadado em baixo, uma pavimentação diferente daquela que te mostrei no cimo da folha.

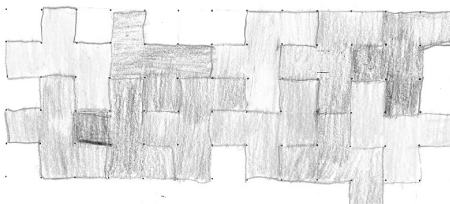


Fig. C.14. Respostas de dois alunos à folha de trabalho B.

12ª Sessão “O jogo com tetraminós”

Principal objectivo

Compreender as transformações, predizendo a necessidade de executar os movimentos virar, deslizar e rodar.

Materiais

Dado, lápis de cores, folha de papel quadriculado e outra folha de papel quadriculado onde estão desenhados um rectângulo e os cinco tetraminós (figura C.15)

).

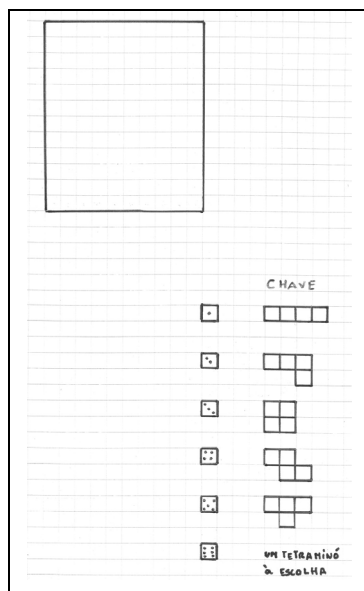


Fig. C.15. Folha com rectângulo e tetraminós.

Objectivos específicos

- Predizer os movimentos virar, deslizar e rodar.
- Desenvolver o conceito de deslizar numa dada direcção, virar em torno de uma linha, rodar em torno de um ponto.
- Desenvolver os conceitos de medida de comprimento, medida de ângulo e medida de área.
- Desenvolver o pensamento visual-espacial através da análise de onde a peça se irá encaixar, pensar primeiro nos movimentos e depois executá-los.
- Desenvolver os conceitos de dominó, triominó e tetraminó.
- Fomentar a comunicação através da discussão.

Descrição

Processos de ensino/aprendizagem

A professora distribuiu os alunos em grupos de três, deu a cada aluno individualmente uma folha de papel quadriculado simples e pediu que colocassem os lápis de cor em cima da mesa. Depois disse-lhes que eles iam desenhar figuras na folha de papel quadriculado, as quais tinham de obedecer a critérios.

Professora: *desenhar uma figura que se possa construir com dois quadrados, mas têm que ser ligados pelo menos por um lado.... Quero ver quem desenha.*

Alunos: *já fiz.*

(A professora desenhou no quadro as figuras feitas pelos alunos e por discussão, a turma concordou que só há uma figura que pode ser desenhada, pois as duas figuras desenhadas pelos alunos são a mesma figura, só que uma está rodada de um quarto de volta).

Professora: *Como se chamará esta figura? Quem me sabe dizer?*

Aluno: *Rectângulo.*

Professora : *Corresponde a um jogo que vocês às vezes costumam jogar.*

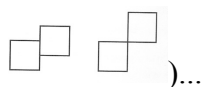
Alunos:... *Ah...*

Aluno: *Dominó.*

Professora: *Isso mesmo. É uma pedra de dominó. Porque é que é um dominó?*

Alunos (em coro): *Porque tem dois quadrados.*

Professora: *Então agora eu quero que vocês me desenhem figuras diferentes que possam construir com três quadrados, mas também já sabem que têm de ficar ligadas por um ...lado e nunca pode ser* (a professora desenha no quadro as ligações dos lados que são proibidas



Alunos: *Já fiz... eu também...*

Professora: *Só haverá esta? Olha o “fulano” fez diferente...o “sicrano” fez assim...*

Alunos: *Eu também... eu também...eu fiz assim... como é que fizeste?...*

Professora: (A professora vai desenhando as novas figuras no quadro à medida que os alunos as indicam) *Há mais alguma diferente desta? Qual?*

(Depois de breve discussão, a turma chega à conclusão que só se podem fazer duas figuras diferentes).

Professora: *Porque é formada por três quadrados, como é que se chamará? Aquele é dominó por dois e por três?... triominó. O que é um trio?*

Alunos: *Um conjunto de três....*

Professora: *Vamos lá ver agora, vamos fazer figuras diferentes mas com quatro quadrados.*

Quero ver quantas é que vocês podem fazer diferentes.

Alunos: *Já fiz... Já fiz... Já fiz... Já fiz... Já fiz.*

Professora: *Vem “fulano” ao quadro*

Alunos: *Esta é diferente... eu fiz duas...Podes pôr esta...*

Professora: *Quantas podemos fazer?*

Alunos: *Quatro.*

Professora: *Quantas figuras fizemos? Contem lá.*

Alunos: *Um, dois, três e quatro.*

Professora: *Falta uma... Como chamaremos a um conjunto de quatro quadrados?*

Alunos: *Quatrominó.*

Professora: *Tetraminó.*

Professora: *Agora vamos fazer jogos com estas figurinhas, ou melhor o jogo “cobrir um rectângulo com tetraminós”*

A professora deu a todos os alunos da turma um dado e uma de folha de papel quadriculado onde está desenhado um rectângulo e os cinco tetraminós (figura C.15).

Quadro C.3. Descrição do jogo com tetraminós.

Descrição do Jogo (adaptado de Clements e outros, 1995)

Repara

No rectângulo de 10X12 unidades de quadricula e na chave para números de 1 a 6 que tens na tua folha de papel quadriculado. Nessa chave, a cada número de 1 a 5 que sai quando um dado é lançado, corresponde-lhe um tetraminó particular como está indicado na tua folha e, para o número 6 corresponde um tetraminó qualquer, escolhido pelo jogador. Para o jogo que vais fazer com os teus outros dois colegas, precisas de lápis de cor e também tens de pintar de cores diferentes cada um dos tetraminós da chave.

Jogo

Um jogador lança um dado. Cada jogador pinta no seu rectângulo um tetraminó como o representado pelo respectivo número saído do lançamento daquele dado. Isso deve ser feito de modo a economizar o espaço, isto é, de modo a poder colocar o maior número de tetraminós possível. Os jogadores devem também principiar por “colocar” cada tetraminó com um lado tocando o fundo do rectângulo ou tocando um tetraminó que já foi colocado. O jogo pára quando um dos jogadores deixa de conseguir colocar tetraminós. Este jogador perde e deixa de jogar. Os outros jogadores continuam o jogo até mais nenhum tetraminó possa ser colocado. Ganha o jogador que tiver coberto o rectângulo com maior número de quadrados.

A professora leu em voz alta a descrição do jogo (Quadro C.3) e foi esclarecendo todas as dúvidas surgidas sobre o mesmo. Depois os grupos começaram a jogar, mas primeiro coloriram de cores diferentes os tetraminós que estavam na folha de papel quadriculado. A professora percorreu os grupos quando solicitada ou quando achou necessária a sua intervenção.

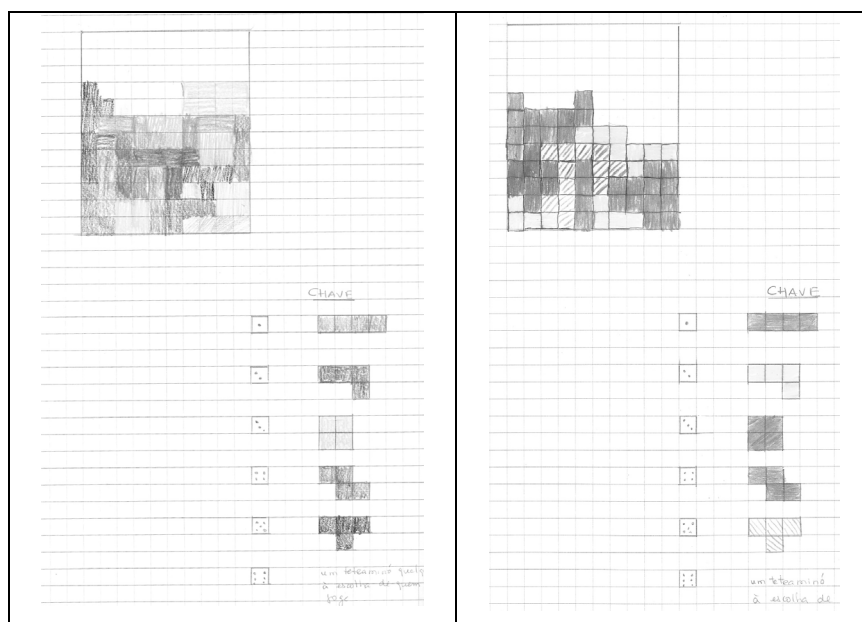


Fig. C.16. Resultados de dois alunos no final do jogo.

ANEXO D

CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta

D.1. Sessões do ambiente de ensino que dão ênfase aos movimentos, rodar, virar e deslizar (turma A)

Procurar no menu principal do CD-Ambiente *Tarta* em USOS DO TARTA, no ítem “com alunos do 1º ciclo do Ensino Básico” ou no *MAPA*.

D.2. Instruções para instalação do CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta

Inserido o CD, o processo de instalação inicia-se automaticamente. Clicar no botão “próximo” até concluir. Depois ficam dois ícons no ambiente de trabalho: micromundo Tarta e ambiente Tarta. No menú inicial, em programas fica também uma pasta com três itens: Ambiente Tarta, desinstalar Ambiente Tarta e Micromundo Tarta.

Tendo o micromundo Tarta sido inicialmente desenvolvido para o sistema operativo Windows 98, por vezes ocorre um erro ao sair do micromundo, caso estejamos a utilizar o Windows XP ou o Windows 2000. Este erro não afecta qualquer funcionalidade do micromundo Tarta.

D.3. O CD – Micromundo Tarta, Ambiente Tarta

